# II. DÉTERMINATION DU MINIMUM DE CERTAINES FONCTIONS CONVEXES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

L'ensemble $f(U) \cup L(F)$ étant fermé, il contient la valeur sup $f$; donc on ne modifie pas le sup $(f(U) \cup L(F))$ en retranchant de cet ensemble toute valeur inférieure à sup $f$. Il en est ainsi en particulier des valeurs $f(x)$ pour $x \in E$, $x \notin E_1$, puisque $f(x) = \sup f$, $x \in E \Rightarrow x \in E_1$, et aussi des valeurs inférieures à sup $L(F)$, d'où le résultat.

Les formules (I. 1) permettent souvent le calcul des sup $f$, inf $f$, sans aucune hypothèse concernant les dérivées secondes. Leur extension au cas où $U$ est un ouvert d'une variété $C^1$ est immédiate, mais, pour éviter les complications, $f$ doit alors être supposée différentiable en tout point de $E$; on peut d'ailleurs les compléter d'une façon évidente lorsque $f$ présente des discontinuités dans $E_0$.

## II. Détermination du minimum de certaines fonctions convexes

Dans l'espace $R^n$, muni de la distance euclidienne, on se donne $q$ points $a_1, a_2, ..., a_q$ tels que $R^n$ soit le plus petit espace linéaire qui les contient. Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \mid x - a_i \mid^{\nu_i}$$

où $\mu_i$, $\nu_i$ sont des nombres réels tels que $\mu_i > 0$, $\nu_i \geqq 1$, $(i = 1, 2, ..., q)$. Dans le cas trivial où $n = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_q = 1$, on a

$$\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), ..., f(a_q) \},$$

parce que le graphe de $f$ est alors une ligne brisée convexe de sommets $(a_i, f(a_i))$, $(i = 1, 2, ..., q)$; si cette ligne possède un côté parallèle à l'axe des $x$, la fonction $f$ n'est pas strictement convexe.

Proposition. *Le cas trivial ci-dessus étant écarté,* f *est toujours strictement convexe et l'équation* $\mathrm{df} = 0$ *admet une ou n'admet aucune solution.*

*Si* $\mathrm{df} = 0$ *pour* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$, *le point* $\mathrm{x}_0$ *appartient à l'intérieur* $\mathring{\mathrm{T}}$ *de l'enveloppe convexe* T *des* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_q$ *et fournit le minimum. Si l'équation* $\mathrm{df} = 0$ *n'a pas de solution, on aura* $\inf \mathrm{f} = \inf \{ \mathrm{f}(\mathrm{a}_i) \mid v_i = 1 \}$, *ce qui montre en particulier que la solution* $\mathrm{x}_0$ *existe quand* $v_i > 1$ *pour* $\mathrm{i} = 1, 2, ..., \mathrm{q}$.

*Démonstration.* La fonction $\mid x \mid^v$, où $v \geqq 1$, étant convexe, il en est de même des $\mu_i \mid x - a_i \mid^{v_i}$ et de leur somme $f(x)$. La fonction $\mid x \mid^v$, où $v > 1$, étant strictement convexe, il s'ensuit la même propriété pour $f$ lorsqu'il existe un indice tel que $v_i > 1$. Lorsque $v_1 = v_2 = ... = v_q = 1$, alors $n \geqq 2$; donc, $\forall x \in R^n$, $\forall x' \in R^n$, on aura $\mid \alpha x + (1 - \alpha) x' - a_i \mid =$

$= | \alpha (x - a_i) + (1 - \alpha)(x' - a_i) | < \alpha | x - a_i | + (1 - \alpha) | x' - a_i |$, $(0 < \alpha < 1)$, pour un indice au moins, d'où le résultat dans ce cas aussi.

Comme $f$ est strictement convexe, $df = 0$ admet au plus une solution.

La relation

$$df = \Big(\sum_{i=1}^{q} \mu_i \nu_i \, | x - a_i |^{\nu_i - 2} (x - a_i)\Big) dx$$

entraîne $E_0 = \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$. Si $df = 0$ pour $x = x_0$, on a $x_0 \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$, $E_1 = \{ x_0 \}$, d'où, d'après (I. 1), $\inf f = \inf (\{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \} \cup \{ f(x_0) \})$; considérant la restriction de $f$ à la ligne droite joignant $x_0$ à un point $a_i$ tel que $\nu_i = 1$, on constate que $f(x_0) < f(a_i)$, d'où $\inf f = f(x_0)$. Si $df(x) \neq 0$, $\forall x \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$, on a $E_1 = \varnothing$ et $\inf f = \inf f(E_0) = \inf \{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \}$.

Si $df = 0$ pour $x = x_0$ et si $x_0 \notin \mathring{T}$, il existera un $(n - 1)$ – plan $H$ tel que $x_0 \in H$, $H \cap \mathring{T} = \varnothing$. Soit $e$ le vecteur unitaire normal à $H$ définissant le demi-espace défini par $H$ contenant $\mathring{T}$. Alors la dérivée de $f$ en $x_0$ dans la direction de $e$,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \nu_i \, | x_0 - a_i |^{\nu_i - 2} (x_0 - a_i) e ,$$

sera négative non nulle, ce qui est impossible; donc $x_0 \in \mathring{T}$.

Corollaire. *Lorsque* $\inf \{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \}$ *se réalise en deux points de* $E_0 = \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$, *alors* $df = 0$ *admet une solution* $x_0$. *Lorsque* $\inf \{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \}$ *se réalise en un seul point* $a_k$, *alors la solution* $x_0$ *de* $df = 0$ *existe si, et seulement si, dans une boule de centre* $a_k$ *et de rayon arbitrairement petit, il existe un point* $x$ *tel que* $f(x) < f(a_k)$.

Quand la solution $x_0$ existe, on peut la déterminer, par rapport à des coordonnées rectangulaires $(x^1, ..., x^n)$, en limitant ses opérations dans le domaine $\mathring{T}$. Posant

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial x^s}, \quad (s = 1, 2, ..., n) ,$$

on voit que l'équation $f_1 = 0$ admet une solution $x^1 = \varphi^1 (x^2, ..., x^n)$ unique et telle que $(\varphi^1 (x^2, ..., x^n), x^2, ..., x^n) \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$; l'équation $f_2 (\varphi^1 (x^2, ..., x^n), x^2, ..., x^n) = 0$ admet aussi une solution unique $x^2 = \varphi^2 (x^3, ..., x^n)$ et il en est de même de $f_3 (\varphi^1, \varphi^2, x^3, ..., x^n) = 0$, etc... L'équation $f_n (\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^{n-1}, x^n) = 0$ fournit finalement la coordonnée $x_o^n$ et, remplaçant successivement dans $\varphi^{n-1}, ..., \varphi^2, \varphi^1$, on obtient aussi les autres coordonnées $x_o^{n-1}, ..., x_0^2, x_0^1$ de $x_0$.

Suivant les données concrètes du problème, la recherche de $x_0$ peut être simplifiée, notamment si $v_1 = v_2 = \ldots = v_q = 1$, cas dans lequel $df = 0$ s'écrit

$$\sum_1^q \mu_i v_i = 0 \qquad \text{où} \qquad v_i = -\frac{x - a_i}{|x - a_i|}.$$

Lorsque, par exemple, $n = 2$, $q = 3$, $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, la condition

$$\sum_1^3 \mu_i v_i = 0$$

ne peut être vraie que si $\mu_1 + \mu_2 > \mu_3$, $|\mu_1 - \mu_2| < \mu_3$; donc quand ces relations ne sont pas remplies, on a $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$. Si elles sont remplies, on considère les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ d'un triangle $A_1 A_2 A_3$ tel que $|\overrightarrow{A_2 A_3}| = \mu_1$, $|\overrightarrow{A_3 A_1}| = \mu_2$, $|\overrightarrow{A_1, A_2}| = \mu_3$; alors, si les angles $\pi - \hat{A}_1, \pi - \hat{A}_2, \pi - \hat{A}_3$ sont supérieurs respectivement aux angles $\sphericalangle (a_2 a_1 a_3)$, $\sphericalangle (a_3 a_2 a_1)$, $\sphericalangle (a_1 a_3 a_2)$, le point $x_0$ existe et, compte tenu des $\sphericalangle (a_2 x_0 a_3) = \pi - \hat{A}_1$, $\sphericalangle (a_3 x_0 a_1) = \pi - \hat{A}_2$, $\sphericalangle (a_1 x_0 a_2) = \pi - \hat{A}_3$, se détermine facilement; en cas contraire, on a encore $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$.

## III. Sur les relations métriques dans un simplexe

Etant donné un simplexe euclidien $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$, on désigne par $\overrightarrow{x_{ij}}$ le vecteur $\overrightarrow{A_i A_j}$, ce qui entraîne $|\overrightarrow{x_{ij}}| = |\overrightarrow{x_{ji}}| = x_{ij} = x_{ji}$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)$, et par $\omega$ le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, \ldots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \ldots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, issus de $A_i$. Ce volume, qui ne dépend pas du sommet choisi, permet d'associer à chaque sommet $A_i$ un angle $\phi_i$ défini par les conditions suivantes:

*a*) $\sin \phi_i = \tau_i = \dfrac{\omega}{x_{i1}\, x_{i2} \ldots x_{i,i-1}\, x_{i,i+1} \ldots x_{i,n+1}}$;

*b*) $0 < \phi_i < \dfrac{\pi}{2}$, lorsque parmi les angles que font les vecteurs $\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, \ldots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \ldots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, pris deux à deux, il y en a au moins un inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} \leqq \phi_i < \pi$ en cas contraire.