Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Autor: Stavroulakis, Nikias

Kapitel: Cas du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41543

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Alors l'un au plus des ϕ_i peut être supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. On pose le problème de préciser les propriétés caractéristiques de la somme $\sum_{i=1}^{n+1} \phi_i$ qui, dans les cas où $n = 1$ et $n = 2$, se réduit à la constante π.

Cas du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$

Nous introduirons souvent dans une même expression ou relation les indices i, j, k, l; il sera alors sous-entendu que (i, j, k, l) est une permutation de $(1, 2, 3, 4)$.

Désignant par $\sigma = \sigma(\{x_{ij}^2\})$ la forme ω^2 qui est donnée par

$$\begin{aligned} 4\sigma = 4\omega^2 &= x_{12}^2 x_{34}^2 (x_{13}^2 + x_{24}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2) \\ &+ x_{13}^2 x_{24}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2) \\ &+ x_{14}^2 x_{23}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{14}^2 - x_{23}^2) \\ &- x_{12}^2 x_{13}^2 x_{23}^2 - x_{12}^2 x_{14}^2 x_{24}^2 - x_{13}^2 x_{14}^2 x_{34}^2 - x_{23}^2 x_{24}^2 x_{34}^2 \end{aligned} \tag{III.1}$$

on voit que, les x_{ij} étant rangés dans un ordre déterminé, les fonctions $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ sont définies sur l'ouvert connexe

$$U : (\sigma(\{x_{ij}^2\}) > 0,\ |x_{12}^2 + x_{13}^2 - x_{23}^2| < 2x_{12}x_{13},\ 0 < x_{ij} < +\infty,\ i \neq j;$$
$$i, j = 1, 2, 3, 4)$$

de R^6 où sont aussi définis les tétraèdres. Identifions chaque point $X \in U$ au tétraèdre correspondant $A_i A_j A_k A_l$. La frontière F de U dans $\bar{R}^6$ donne lieu à des tétraèdres dégénérés parmi lesquels on distingue *a)* les figures planes X_{d1} obtenues pour des valeurs finies et non nulles des x_{ij}, *b)* les tétraèdres dégénérés X_{d2} de la forme $A_i A_j A_k A_l^\infty$, A_l^∞ désignant un sommet éloigné à l'infini, *c)* les tétraèdres dégénérés X_{d3} de la forme $A_i A_j A_k^\infty A_l^\infty$.

Proposition 1. *Désignant par* s_i *une valeur limite de* τ_i *sur* F, *l'ensemble des systèmes de valeurs* (s_i, s_j, s_k, s_l) *qui ne sont pas de la forme* $(\tau_i, \tau_j, \tau_k, \tau_l)$, *s'obtient en nous bornant aux tétraèdres dégénérés* X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. *En particulier, on a sur* X_{d1} :

$$(s_i, s_j, s_k, s_l) = (0, 0, 0, 0)$$

sur X_{d2}:

$$(s_i, s_j, s_k, s_l) = (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_j \sin\psi, \sin\alpha_k \sin\psi, 0)$$

avec

$$0 \leqq \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k \leqq \pi\,, \quad \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = \pi\,, \quad 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}\,,$$

sur X_{d3}:

$$\begin{aligned}(s_i, s_j, s_k, s_l) &= (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_j \sin\psi, 0, 0)\\ &= (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_i \sin\psi, 0, 0)\end{aligned}$$

avec

$$0 \leqq \alpha_i, \alpha_j \leqq \pi\,, \quad \alpha_i + \alpha_j = \pi\,, \quad 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}\,.$$

PROPOSITION 2. *Soient* A_1, A_2, A_3, A_4 *quatre points distincts dans un espace euclidien* R^n *et désignons par* $\varphi_{(ij)(kl)}$ *l'angle aigu (ou droit) des directions définies par* $A_i A_j$ *et* $A_k A_l$. *Alors les relations*

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)}$$

entraînent nécessairement

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = 0\,.$$

Démonstration. Comme

$$2x_{ij}\,x_{kl}\cos\varphi_{(ij)(kl)} = 2\,|\vec{x}_{ij}\,\vec{x}_{kl}| = |x_{il}^2 + x_{jk}^2 - x_{ik}^2 - x_{jl}^2|\,,$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}\frac{|x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2|}{x_{12}\,x_{34}} &= \frac{|x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2|}{x_{13}\,x_{24}}\\ &= \frac{|x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{22}^2 - x_{34}^2|}{x_{14}\,x_{23}}\,.\end{aligned}$$

Ces relations sont d'abord remplies lorsque

$$x_{12}^2 + x_{34}^2 = x_{13}^2 + x_{24}^2 = x_{14}^2 + x_{23}^2 = \lambda^2\,, \qquad (III.2)$$

λ étant une longueur convenable, et alors

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = \frac{\pi}{2}.$$

En cas contraire, on peut supposer $x_{14}^2 + x_{23}^2 > x_{13}^2 + x_{24}^2 > x_{12}^2 + x_{34}^2$, ce qui donne

$$x_{13}\, x_{24} = x_{12}\, x_{34} + x_{14}\, x_{23}\,, \tag{III.3}$$

$$x_{13}\, x_{24}\,(x_{13}^2 + x_{24}^2) = x_{12}\, x_{34}\,(x_{12}^2 + x_{34}^2) + x_{14}\, x_{23}\,(x_{14}^2 + x_{23}^2)\,. \tag{III.4}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} x_{12}^2\, x_{34}^2\,(x_{13}^2 + x_{24}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2) \\ = x_{12}\, x_{34}\big(x_{13}\, x_{24}\,(x_{14}^2 + x_{23}^2) - x_{14}\, x_{23}\,(x_{13}^2 + x_{24}^2)\big)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{13}^2\, x_{24}^2\,(x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2) \\ = x_{13}\, x_{24}\big(x_{14}\, x_{23}\,(x_{12}^2 + x_{34}^2) + x_{12}\, x_{34}\,(x_{14}^2 + x_{23}^2)\big)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{14}^2\, x_{23}^2\,(x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{14}^2 - x_{23}^2) \\ = x_{14}\, x_{23}\big(x_{13}\, x_{24}\,(x_{12}^2 + x_{34}^2) - x_{12}\, x_{34}\,(x_{13}^2 + x_{24}^2)\big)\,. \end{aligned}$$

Remplaçant dans (III. 1) on trouve

$$\sigma\big(\{x_{ij}^2\}\big) = -\,(x_{12}\, x_{13}\, x_{23} + x_{13}\, x_{14}\, x_{34} - x_{12}\, x_{14}\, x_{24} - x_{23}\, x_{24}\, x_{34})^2\,.$$

Comme $\sigma\,(\{x_{ij}^2\}) > 0$, $\forall X \in U$, il reste à voir s'il existe des X_{d1} tels que

$$x_{13}\,(x_{12}\, x_{23} + x_{14}\, x_{34}) = x_{24}\,(x_{12}\, x_{14} + x_{23}\, x_{34})\,. \tag{III.5}$$

Remplaçant les valeurs des x_{13}, x_{24}, tirées des (III. 3), (III. 5), dans (III. 4) on obtient $(x_{14} - x_{23})^2 = (x_{12} + x_{34})^2$, ce qui donne $x_{14} = x_{12} + x_{23} + x_{34}$ ou $x_{23} = x_{21} + x_{14} + x_{43}$. Les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont donc alignés et $\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = 0$.

Tout tétraèdre satisfaisant à (III. 2) sera dit *normal*. On considère aussi des tétraèdres normaux dégénérés X_{d1}, X_{d2}, X_{d3} résultant des déformations continues des tétraèdres normaux.

COROLLAIRE. *Pour qu'un tétraèdre soit normal il faut et il suffit que*

$$x_{12}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_{12}} + x_{34}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_{34}} = x_{13}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_{13}} + x_{24}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_{24}} = x_{14}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_{14}} + x_{23}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_{23}}\,,$$

ou, en vertu du théorème d'Euler,

$$x_{12}\frac{\partial\omega}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial\omega}{\partial x_{34}} = \omega\,, \qquad x_{13}\frac{\partial\omega}{\partial x_{13}} + x_{24}\frac{\partial\omega}{\partial x_{24}} = \omega \qquad (III.6)$$

ou encore, en posant $y_{ij} = x_{ij}^2\,, \qquad \sigma = \sigma(\{y_{ij}\})\,,$

$$y_{12}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{12}} + y_{34}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{34}} = \sigma\,, \qquad y_{13}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{13}} + y_{24}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{24}} = \sigma\,. \qquad (III.7)$$

PROPOSITION 3. *La relation* $\sum_{i=1}^{4} \phi_i = \pi$ *est valable pour tout tétraèdre normal.*

Démonstration. En vertu de (III. 2), on peut associer à chaque sommet A_i d'un tétraèdre normal le paramètre y_i défini par les relations

$$\begin{aligned} 2\vec{x}_{ij}\,\vec{x}_{ik} &= 2\vec{x}_{ik}\,\vec{x}_{il} = 2\vec{x}_{il}\,\vec{x}_{ij} = x_{ij}^2 + x_{ik}^2 - x_{jk}^2 \\ &= x_{ik}^2 + x_{il}^2 - x_{kl}^2 = x_{il}^2 + x_{ij}^2 - x_{lj}^2 = 2y_i\,, \qquad (III.8) \end{aligned}$$

d'où

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \lambda^2\,, \quad x_{ij}^2 = y_{ij} = y_i + y_j\,, \quad (i \neq j;\, i,j = 1,2,3,4)\,. \qquad (III.9)$$

Remplaçant dans l'expression de $\dfrac{\partial\sigma}{\partial y_{ij}}$ on trouve $\dfrac{\partial\sigma}{\partial y_{ij}} = y_k\, y_l$ et ensuite, moyennant (III. 7),

$$\sigma = y_1\, y_2\, y_3 + y_1\, y_2\, y_4 + y_1\, y_3\, y_4 + y_2\, y_3\, y_4\,. \qquad (III.10)$$

Comme d'ailleurs

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_{ij}^2 & y_i & y_i \\ y_i & x_{ik}^2 & y_i \\ y_i & y_i & x_{il}^2 \end{vmatrix} = x_{ij}^2\, x_{ik}^2\, x_{il}^2 - \lambda^2\, y_i^2\,,$$

on en déduit

$$\cos^2\phi_i = 1 - \sin^2\phi_i = 1 - \frac{\sigma}{x_{ij}^2\, x_{ik}^2\, x_{il}^2} = \frac{\lambda^2\, y_i^2}{x_{ij}^2\, x_{ik}^2\, x_{il}^2}\,.$$

Désignant par ψ_{ij} l'angle des vecteurs $\vec{x}_{ik}, \vec{x}_{il}$, il s'ensuit, d'après (III. 8), que les $\psi_{ij}, \psi_{ik}, \psi_{il}$ sont tout ensemble inférieurs, égaux ou supérieurs à $\frac{\pi}{2}$ suivant que $y_i > 0$, $y_i = 0$ ou $y_i < 0$. Selon la définition de ϕ_i, on a donc respectivement

$$\phi_i < \frac{\pi}{2}, \quad \phi_i = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \phi_i > \frac{\pi}{2},$$

et cela prouve que

$$\cos \phi_i = \frac{\lambda y_i}{x_{ij}\, x_{ik}\, x_{il}} .$$

Remplaçant les $\sin \phi_i$, $\cos \phi_i$ dans l'identité

$$\sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) =$$
$$\sum \sin \phi_i \cos \phi_j \cos \phi_k \cos \phi_l - \sum \cos \phi_i \sin \phi_j \sin \phi_k \sin \phi_l$$

et tenant compte des (III. 9), (III. 10), on obtient

$$\sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) = \frac{\lambda \sqrt{\sigma}}{y_{12}\, y_{13}\, y_{14}\, y_{23}\, y_{24}\, y_{34}}$$
$$\Big((y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4)\lambda^2 - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\sigma\Big) = 0 .$$

Comme d'ailleurs $0 < \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 < 2\pi$, il s'ensuit

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \pi .$$

COROLLAIRE. *Si* $\phi_i > 0$, (i = 1, 2, 3, 4), *et* $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \pi$, *il existe une infinité de tétraèdres normaux tels que* $\tau_i = \sin \phi_i$, (i = 1, 2, 3, 4). *Leurs arêtes sont données par les formules*

$$x_{ij} = x_{ji} = k \sqrt{\operatorname{ctg} \phi_i + \operatorname{ctg} \phi_j} ,$$

k *étant une longueur arbitraire.*

La relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ s'étend immédiatement aux tétraèdres normaux dégénérés X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. Il n'en est pas de même pour tous les autres X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. Si un X_{d1}, par exemple, est tel que

$$\psi_{12} = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_{13} > \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_{14} > \frac{\pi}{2},$$

la somme $\sum_1^4 \phi_i$, calculée sur les X qui ont pour limite X_{d1}, aura deux valeurs limites, 0 et π.

DÉTERMINATION DES BORNES D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ PAR APPLICATION DES FORMULES (I. 1). La forme de f est supposée telle que $f(u_1, u_2, u_3, u_4)$ soit continue sur un ouvert de R^4 contenant le cube $0 \leqq u_i \leqq 1$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. L'ensemble $E_0 \subset U$, donc aussi $E \subset U$, s'obtient par l'intermédiaire de l'ensemble des points de R^4 où les dérivées de $f(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ne sont pas définies.

En ce qui concerne la détermination de E_1, on peut se limiter à la considération de l'ensemble $E \cap H$, H étant un hyperplan $(x_{23} = c_{23} > 0)$, puisque f est homogène de degré zéro. Etant donné que

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} = -\frac{1}{x_{ij}}\left(\tau_i \frac{\partial f}{\partial \tau_i} + \tau_j \frac{\partial f}{\partial \tau_j}\right) + \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x_{ij}}\left(\sum_1^4 \tau_q \frac{\partial f}{\partial \tau_q}\right),$$

on obtient la relation

$$\left(x_{12}\frac{\partial f}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial f}{\partial x_{34}}\right)\omega = \left(x_{12}\frac{\partial \omega}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial \omega}{\partial x_{34}} - \omega\right)\left(\sum_1^4 \tau_q \frac{\partial f}{\partial \tau_q}\right)$$

et les deux autres qui s'en déduisent par permutation d'indices. Par conséquent les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_{12}} = \frac{\partial f}{\partial x_{34}} = \frac{\partial f}{\partial x_{13}} = \frac{\partial f}{\partial x_{24}} = \frac{\partial f}{\partial x_{14}} = 0$$

sont d'abord remplies sur l'ensemble $E_1' \subset E \cap H$ défini par

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_1} = \frac{\partial f}{\partial \tau_2} = \frac{\partial f}{\partial \tau_3} = \frac{\partial f}{\partial \tau_4} = 0\,,$$

puis sur un ensemble $E_1'' \subset E \cap H$ tel que tout $X \in E_1''$ satisfasse aux (III. 6) et soit donc normal. Ainsi $E_1 = E_1' \cup E_1''$ et $f(E_1) = f(E_1') \cup f(E_1'')$. Etant donné qu'en tout $X \in E_1''$ la valeur de f est de la forme

$$f(\sin\phi_1, \sin\phi_2, \sin\phi_3, \sin\phi_4) = g(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \quad \text{avec} \quad \sum_1^4 \phi_i = \pi\,,$$

suivant la proposition 3, on peut éviter la détermination de E_1'' en lui substituant le problème, plus facile en général, de la détermination des bornes de $g(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ sous les conditions

$$0 < \phi_i < \pi\,, \quad (i = 1, 2, 3, 4)\,, \quad \sum_1^4 \phi_i = \pi\,.$$

En ce qui concerne le calcul des $\sup L'(F)$, $\inf L'(F)$, où $L'(F)$ est l'ensemble des valeurs limites qui ne sont pas de la forme $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, on voit, compte tenu de la proposition 1, que *a)* les X_{d1} donnent la seule valeur $f(0, 0, 0, 0)$, *b)* les X_{d2} donnent les fonctions

$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi, 0),$$
$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, 0, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, 0, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$f(0, \sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$\left(0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < \pi, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi, \quad 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

dont les bornes s'obtiennent moyennant les formules (I. 1), *c)* les X_{d3} donnent les fonctions

$$f(\sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi, 0, 0), \quad f(\sin\alpha \sin\psi, 0, \sin\alpha \sin\psi, 0),$$
$$f(\sin\alpha \sin\psi, 0, 0, \sin\alpha \sin\psi), \quad f(0, \sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi, 0),$$
$$f(0, \sin\alpha \sin\psi, 0, \sin\alpha \sin\psi), \quad f(0, 0, \sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi),$$
$$\left(0 < \alpha < \pi, 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

dont les bornes s'obtiennent également par la méthode générale.

Ayant obtenu les $\sup L'(F)$, $\inf L'(F)$, on a

$$\sup f = \sup\left(f(E_0) \cup f(E_1') \cup \{\sup g, \sup L'(F)\}\right),$$
$$\inf f = \inf\left(f(E_0) \cup f(E_1') \cup \{\inf g, \inf L'(F)\}\right).$$

Si l'on désigne par $\arcsin \tau_i$ le plus petit arc positif ayant le sinus τ_i, la démonstration des propositions suivantes est maintenant immédiate.

PROPOSITION 4. *La fonction* $\sum_1^4 \arcsin \tau_i$ *vérifie les relations*

$$0 \leqq \sum_1^4 \arcsin \tau_i \leqq \pi .$$

La borne supérieure π *s'obtient* a) *sur tout tétraèdre normal pour lequel l'un des* ϕ_i *est égal à* $\frac{\pi}{2}$, b) *sur tout tétraèdre normal pour lequel* $\phi_i < \frac{\pi}{2}$, (i = 1, 2, 3, 4), c) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* X_{d2}, $A_iA_jA_kA_l^\infty$, *dont*

la face $A_i A_j A_k$ *n'a aucun angle supérieur à* $\frac{\pi}{2}$, d) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* X_{d3}, $A_i A_j A_k^\infty A_l^\infty$, *tel que* $\phi_i = \phi_j = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, pour tout tétraèdre qui n'est pas normal, on a

$$\sum_1^4 \arcsin \tau_i < \pi .$$

PROPOSITION 5. *La fonction*

$$- \arcsin \tau_4 + \sum_1^3 \arcsin \tau_i$$

vérifie les relations

$$0 \leqq - \arcsin \tau_4 + \sum_1^3 \arcsin \tau_i \leqq \pi .$$

La borne inférieure 0 *s'obtient* a) *sur tout tétraèdre normal pour lequel* $\phi_4 \geqq \frac{\pi}{2}$, b) *sur tout* X_{d1} *et sur toute autre forme dégénérée pour laquelle* $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$, c) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* $A_4 A_i A_j A_k^\infty$ *tel que* $\psi_{4k} \geqq \frac{\pi}{2}$, d) *sur tout* X_{d3} *de la forme* $A_4 A_i A_j^\infty A_k^\infty$.

Par conséquent, pour tout tétraèdre qui n'est pas normal, on a

$$- \arcsin \tau_4 + \sum_1^3 \arcsin \tau_i > 0 .$$

THÉORÈME. *Pour qu'un tétraèdre soit normal, il faut et il suffit que la relation* $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ *soit valable.*

Démonstration. Si le tétraèdre n'est pas normal, on a $\phi_i \neq \frac{\pi}{2}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Par suite, ou bien $\phi_i < \frac{\pi}{2}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, et alors $\sum_1^4 \phi_i$

$< \pi$, suivant la proposition 4, ou bien $\phi_i > \frac{\pi}{2}$ pour un seul indice, soit $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, et alors $\sum_1^4 \phi_i > \pi$, suivant la proposition 5. Donc la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ n'est jamais vraie pour un tétraèdre qui n'est pas normal. Cela démontre le théorème, compte tenu aussi de la proposition 3.

La borne supérieure de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ lorsque $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, par exemple, se réalise sur la frontière du domaine $U' \subset U$ obtenu en adjoignant les conditions

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} \geqq \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} \geqq \frac{\pi}{2}$$

aux relations définissant U. Sans entrer dans les détails, on remarque que l'ensemble des valeurs de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ sur des X_{d2} de la forme $A_4 A_3 A_1 A_2^\infty$ avec

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} > \frac{\pi}{2},$$

admet le maximum

$$2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

qui semble être le suprémum cherché.

Toutes les propriétés précédentes sont de caractère local, parce qu'elles se traduisent, d'une façon évidente, par des propriétés des angles que font deux à deux les six droites $d_{ij} = \Pi_k \cap \Pi_l$, en désignant par Π_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, quatre plans issus d'un même point de R^n et parallèles aux faces du tétraèdre.

Cas d'un simplexe quelconque $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$.

Les deux exemples suivants montrent que la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ ne peut pas s'étendre de la même façon à des simplexes de dimension $n \geqq 4$.