Cas d'un simplexe quelconque $A_1 A_2 ... A_{n+1}$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$< \pi$, suivant la proposition 4, ou bien $\phi_i > \frac{\pi}{2}$ pour un seul indice, soit $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, et alors $\sum_1^4 \phi_i > \pi$, suivant la proposition 5. Donc la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ n'est jamais vraie pour un tétraèdre qui n'est pas normal. Cela démontre le théorème, compte tenu aussi de la proposition 3.

La borne supérieure de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ lorsque $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, par exemple, se réalise sur la frontière du domaine $U' \subset U$ obtenu en adjoignant les conditions

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} \geqq \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} \geqq \frac{\pi}{2}$$

aux relations définissant U. Sans entrer dans les détails, on remarque que l'ensemble des valeurs de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ sur des X_{d2} de la forme $A_4 A_3 A_1 A_2^\infty$ avec

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} > \frac{\pi}{2},$$

admet le maximum

$$2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

qui semble être le suprémum cherché.

Toutes les propriétés précédentes sont de caractère local, parce qu'elles se traduisent, d'une façon évidente, par des propriétés des angles que font deux à deux les six droites $d_{ij} = \Pi_k \cap \Pi_l$, en désignant par Π_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, quatre plans issus d'un même point de R^n et parallèles aux faces du tétraèdre.

Cas d'un simplexe quelconque $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$.

Les deux exemples suivants montrent que la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ ne peut pas s'étendre de la même façon à des simplexes de dimension $n \geqq 4$.

a) Le n-simplexe dont toutes les arêtes sont égales à a donne lieu aux relations

$$\omega^2 = \frac{n+1}{2^n} a^{2n}, \quad \tau_i = \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, \quad \sum_1^{n+1} \phi_i = (n+1) \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{2^n}},$$

donc $\sum_1^{n+1} \phi_i < \pi$ pour $n \geqq 4$, et $\sum_1^{n+1} \phi_i \to 0$ pour $n \to +\infty$.

b) Considérant le simplexe défini par n vecteurs orthonormés $\overrightarrow{x_{12}}, \overrightarrow{x_{13}}, \ldots, \overrightarrow{x_{1,n+1}}$, on obtient

$$\omega = 1, \tau_1 = 1, \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

$$\sum_1^{n+1} \phi_i = \frac{\pi}{2} + n \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

donc $\sum_1^{n+1} \phi_i < \pi$ pour $n \geqq 4$, et $\sum_1^{n+1} \phi_i \to \frac{\pi}{2}$ pour $n \to +\infty$.

EXERCICES.

1. R^n étant le plus petit espace linéaire contenant les points $a_1, \ldots, a_q$, déterminer le minimum de

$$f(x) = \sum_1^q \mu_i \, | x - a_i |^{\nu_i}, \quad (\mu_i > 0, \nu_i \geqq 1; i = 1, 2, \ldots, q),$$

lorsque x décrit un sous-espace linéaire de R^n.

2) Dans un tétraède $A_1 A_2 A_3 A_4$, soit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ le dièdre des deux faces qui se coupent suivant l'arête $A_i A_j$. Démontrer la relation

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_{ij}} = x_{ij} x_{kl} \operatorname{ctg} \alpha_{kl}.$$

En déduire la formule

$$3\omega = x_{12} x_{34} (x_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} + x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12})$$
$$+ x_{13} x_{24} (x_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} + x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13}) + x_{14} x_{23} (x_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23} + x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14}).$$

3. Pour tout tétraèdre normal on a

$$x_{12} x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} = x_{13} x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} = x_{14} x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23},$$
$$x_{12} \operatorname{tg} \alpha_{12} + x_{34} \operatorname{tg} \alpha_{34} = x_{13} \operatorname{tg} \alpha_{13} + x_{24} \operatorname{tg} \alpha_{24} = x_{14} \operatorname{tg} \alpha_{14} + x_{23} \operatorname{tg} \alpha_{23}.$$

4. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs non coplanaires tels que $\vec{a}\vec{b} \neq 0$, $\vec{b}\vec{c} \neq 0$, $\vec{c}\vec{a} \neq 0$. Alors les angles formés par les vecteurs $(\vec{b}\vec{c})\,\vec{a}$, $(\vec{c}\vec{a})\,\vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})\,\vec{c}$ sont tous inférieurs ou tous supérieurs à $\frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas on pose

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|}$$

et dans le second

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pi - \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|}.$$

Démontrer la formule

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \phi\big(\vec{a}, \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}), \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})\big)$$
$$+ \phi\big(\vec{b}, \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}), \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})\big) + \phi\big(\vec{c}, \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}), \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a})\big) = \pi$$

(Reçu le 11 avril 1967)

M. Nikias Stavroulakis
105, rue de la Convention
Paris 15e

vide-leer-empty