Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Autor: Stavroulakis, Nikias

Kapitel: Cas d'un simplexe quelconque $A_1 A_2 ... A_{n+1}$.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41543

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$< \pi$, suivant la proposition 4, ou bien $\phi_i > \frac{\pi}{2}$ pour un seul indice, soit $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, et alors $\sum_1^4 \phi_i > \pi$, suivant la proposition 5. Donc la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ n'est jamais vraie pour un tétraèdre qui n'est pas normal. Cela démontre le théorème, compte tenu aussi de la proposition 3.

La borne supérieure de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ lorsque $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, par exemple, se réalise sur la frontière du domaine $U' \subset U$ obtenu en adjoignant les conditions

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} \geqq \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} \geqq \frac{\pi}{2}$$

aux relations définissant U. Sans entrer dans les détails, on remarque que l'ensemble des valeurs de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ sur des X_{d2} de la forme $A_4 A_3 A_1 A_2^\infty$ avec

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} > \frac{\pi}{2},$$

admet le maximum

$$2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

qui semble être le suprémum cherché.

Toutes les propriétés précédentes sont de caractère local, parce qu'elles se traduisent, d'une façon évidente, par des propriétés des angles que font deux à deux les six droites $d_{ij} = \Pi_k \cap \Pi_l$, en désignant par Π_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, quatre plans issus d'un même point de R^n et parallèles aux faces du tétraèdre.

Cas d'un simplexe quelconque $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$.

Les deux exemples suivants montrent que la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ ne peut pas s'étendre de la même façon à des simplexes de dimension $n \geqq 4$.

a) Le n-simplexe dont toutes les arêtes sont égales à a donne lieu aux relations

$$\omega^2 = \frac{n+1}{2^n} a^{2n}, \quad \tau_i = \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, \quad \sum_1^{n+1} \phi_i = (n+1) \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{2^n}},$$

donc $\sum_1^{n+1} \phi_i < \pi$ pour $n \geqq 4$, et $\sum_1^{n+1} \phi_i \to 0$ pour $n \to +\infty$.

b) Considérant le simplexe défini par n vecteurs orthonormés $\overrightarrow{x_{12}}, \overrightarrow{x_{13}}, \ldots, \overrightarrow{x_{1,n+1}}$, on obtient

$$\omega = 1, \tau_1 = 1, \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

$$\sum_1^{n+1} \phi_i = \frac{\pi}{2} + n \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

donc $\sum_1^{n+1} \phi_i < \pi$ pour $n \geqq 4$, et $\sum_1^{n+1} \phi_i \to \frac{\pi}{2}$ pour $n \to +\infty$.

EXERCICES.

1. R^n étant le plus petit espace linéaire contenant les points $a_1, \ldots, a_q$, déterminer le minimum de

$$f(x) = \sum_1^q \mu_i \, | x - a_i |^{\nu_i}, \quad (\mu_i > 0, \nu_i \geqq 1; i = 1, 2, \ldots, q),$$

lorsque x décrit un sous-espace linéaire de R^n.

2) Dans un tétraède $A_1 A_2 A_3 A_4$, soit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ le dièdre des deux faces qui se coupent suivant l'arête $A_i A_j$. Démontrer la relation

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_{ij}} = x_{ij} x_{kl} \operatorname{ctg} \alpha_{kl}.$$

En déduire la formule

$$3\omega = x_{12} x_{34} (x_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} + x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12})$$
$$+ x_{13} x_{24} (x_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} + x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13}) + x_{14} x_{23} (x_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23} + x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14}).$$

3. Pour tout tétraèdre normal on a

$$x_{12} x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} = x_{13} x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} = x_{14} x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23},$$
$$x_{12} \operatorname{tg} \alpha_{12} + x_{34} \operatorname{tg} \alpha_{34} = x_{13} \operatorname{tg} \alpha_{13} + x_{24} \operatorname{tg} \alpha_{24} = x_{14} \operatorname{tg} \alpha_{14} + x_{23} \operatorname{tg} \alpha_{23}.$$

4. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs non coplanaires tels que $\vec{a}\vec{b} \neq 0$, $\vec{b}\vec{c} \neq 0$, $\vec{c}\vec{a} \neq 0$. Alors les angles formés par les vecteurs $(\vec{b}\vec{c})\,\vec{a}$, $(\vec{c}\vec{a})\,\vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})\,\vec{c}$ sont tous inférieurs ou tous supérieurs à $\frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas on pose

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|}$$

et dans le second

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pi - \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|}.$$

Démontrer la formule

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \phi\big(\vec{a}, \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}), \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})\big)$$
$$+ \phi\big(\vec{b}, \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}), \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})\big) + \phi\big(\vec{c}, \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}), \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a})\big) = \pi$$

(Reçu le 11 avril 1967)

M. Nikias Stavroulakis
105, rue de la Convention
Paris 15e

vide-leer-empty