Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES THÉORÈMES BIEN CONNUS SUR LES A.N.R. ET LES C.W. COMPLEXES

Autor: Weber, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41544

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

QUELQUES THÉORÈMES BIEN CONNUS SUR LES A.N.R. ET LES C.W. COMPLEXES

par C. WEBER

Remarque préliminaire. Ces notes ne contiennent rien d'original. Elles ont pour unique but de dégager parmi une littérature abondante, quelques théorèmes « utiles », dépouillés, dans la mesure du possible, d'hypothèses inutilement restrictives.

Les références de base sont, à mon avis:

1° Le livre de Borsuk, en remarquant que ce qui est appelé ici A.N.R. est appelé A.N.R. ($\mathfrak{M}$) chez Borsuk et ce qui est appelé ici A.N.R. compact est appelé A.N.R. chez Borsuk.

On trouvera aussi chez Borsuk une bibliographie assez étendue.

2° L'article de Palais qui, sous un volume réduit, dégage toutes les idées essentielles.

§ 1. THÉORÈMES CLASSIQUES SUR LES ESPACES MÉTRIQUES

Rappelons pour commencer le:

THÉORÈME DE DUGUNDJI. Soit X un espace métrisable et soit $A \subset X$ un fermé. Soit f: $A \to E$ une application continue, où E est un E.V.T. localement convexe. (Le corps de base est toujours **R**.) Alors f s'étend en une application continue F: $X \to E$, telle que $F(X)$ soit contenu dans l'enveloppe convexe de $f(A)$.

Pour une démonstration, voir Dugundji, ou Borsuk, chap. 3, § 7.

On remarquera que le théorème de Dugundji est une généralisation du théorème bien connu de Tietze. (La source est un peu plus particulière, mais le but est plus général.)

Rappelons maintenant le:

THÉORÈME DE KURATOWSKI-WOJDYSLAWSKI. Soit X un espace métrisable. Alors il existe un espace de Banach B et un homéomorphisme h de X sur un sous-espace $h(X)$ de B, tel que $h(X)$ soit fermé dans l'enveloppe convexe de $h(X)$.

N. B. : $h(X)$ n'est en général pas fermé dans B, le plongement de Kuratowski h étant même un moyen élémentaire de compléter les espaces métriques.

Pour une démonstration, voir Borsuk, chap. 3, § 8.

Remarque. Si X est métrisable compact, il est bien connu qu'il se plonge comme un fermé dans le cube de Hilbert.

Rappelons aussi que tout espace métrisable est paracompact.

§ 2. Théorèmes généraux sur les A.N.R.

Soit X un espace topologique et soit $A \subset X$ un sous-espace.

On dit que A est un rétracte de X s'il existe une application continue $r: X \to A$ telle que $r \circ i = id_A$, $i: A \to X$ étant l'injection naturelle. r est appelé une rétraction de X sur A.

On dit que A est un rétracte de voisinage de X s'il existe un voisinage V de A dans X et une rétraction de V sur A.

On remarque immédiatement que si X est séparé, et si A est un rétracte de voisinage de X, alors A est fermé dans X.

Définition. Soit X un espace métrisable. On dit que X est un rétracte absolu (en anglais « Absolute Retract », d'où l'abréviation A.R.) si chaque fois que l'on a un homéomorphisme h de X sur un sous-espace fermé $h(X)$ d'un métrisable Z alors $h(X)$ est un rétracte de Z.

On dit que X est un rétracte absolu de voisinages (en anglais « Absolute Neighborhood Retract » d'où l'abréviation A.N.R.) si chaque fois que l'on a un homéomorphisme h de X sur un sous-espace fermé d'un métrisable Z alors $h(X)$ est un rétracte de voisinage de Z.

Le théorème suivant donne une définition équivalente pour les A.R. et les A.N.R. (on peut dire grossièrement que c'est parce que l'on veut ce théorème que l'on se restreint aux espaces métrisables dans les définitions précédentes).

Théorème. 1) X est un A.R. si et seulement si chaque fois que l'on a un métrisable Y, un fermé $Y' \subset Y$, et une application continue $f: Y' \to X$, alors f s'étend en une application $F: Y \to X$.

2) X est un A.N.R. si et seulement si chaque fois que l'on a un métrisable Y, un fermé $Y' \subset Y$, et une application continue $f: Y' \to X$, alors f s'étend en une application $F: V \to X$, V étant un voisinage de Y' dans Y.

Preuve. Indiquons comment l'on démontre 2), la démonstration de 1) étant tout à fait analogue.

a) Si X est un A.N.R. d'après le théorème de Kuratowski il existe un plongement h de X dans un Banach B, tel que $h(X)$ soit fermé dans l'enveloppe convexe $C(h(X))$; de plus il existe une rétraction $r: V \to h(X)$, V étant un voisinage de $h(X)$ dans $C(h(X))$.

D'après le théorème de Dugundji, $h \circ f$ s'étend en une application $F_1: Y \to C(h(X))$. Soit $\mathcal{U} = F_1^{-1}(V)$. $\mathcal{U}$ est un voisinage de Y' dans Y et $F: h^{-1} \circ r \circ F_1 \mid \mathcal{U}$ est l'extension cherchée.

b) Soit X homéomorphe à un sous-espace fermé de Z. Prenons $Y = Z$, $Y' = X$, $f: Y' \to X$ l'application identique. Par hypothèse, f s'étend en une application définie sur un vg. de X dans Z et fournit ainsi une rétraction d'un vg. de X dans Z, sur X.

C.q.f.d.

Corollaire. Un rétracte d'un A.R. est un A.R.

On voit donc qu'un E.V.T. localement convexe, métrisable est un A.R., en vertu du théorème de Dugundji. En particulier, un Fréchet, un Banach, un préhilbert, un Hilbert sont des A.R. (Ceci sans hypothèse de séparabilité !)

De même une partie convexe d'un E.V.T. localement convexe métrisable est un A.R. Le cube de Hilbert est un A.R. compact.

Un rétracte d'une telle partie convexe est aussi un A.R., et réciproquement un A.R. est toujours un rétracte d'une partie convexe d'un E.V.T. localement convexe métrisable.

En conséquence, un A.R. est contractible.

Corollaire. Un rétracte de voisinage d'un A.N.R. est un A.N.R. Un ouvert d'un A.N.R. est un A.N.R.

Utilisant les théorèmes de plongements et de voisinages réguliers bien connus, on voit donc, par exemple, qu'une variété différentiable paracompacte de dimension finie ou qu'un polyèdre sont des A.N.R. (Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.)

On voit aussi qu'il existe un voisinage de la sphère d'Alexander $\Sigma^2 \subset S^3$ qui se rétracte sur Σ^2. (En vertu du théorème de van Kampen, il ne saurait y avoir de voisinage qui se rétracte par déformation sur Σ^2.)

THÉORÈME DE HANNER (GÉNÉRALISÉ). Un espace séparé, paracompact qui est localement un A.N.R. est un A.N.R.

Ce théorème est le théorème 5 de Palais.

Le théorème de Hanner disait qu'un métrique qui est une réunion dénombrable d'ouverts A.N.R. est un A.N.R. (Dans la démonstration de Hanner thm. 3.2, l'hypothèse de séparabilité n'est pas essentielle.)

Pour montrer le théorème généralisé de Palais, on utilise le théorème de Smirnov qui affirme qu'un paracompact séparé est métrisable s'il est localement métrisable. Ensuite, grâce à la paracompacité, on se ramène au cas envisagé par Hanner.

On voit donc qu'une variété topologique paracompacte, séparée, modelée sur un E.V.T. localement convexe métrisable est un A.N.R.

De même, on voit qu'un polyèdre localement fini est un A.N.R.

On peut remarquer que le théorème de Palais répond affirmativement à une question posée par Borsuk. (Borsuk, Problem 10.6, chap. IV.)

Une autre propriété intéressante des A.N.R. est la suivante:

THÉORÈME (dû à Kuratowski): Soit X_0 un sous-ensemble d'un compact X. Soit Y un A.N.R. et soit $y_0 \in Y$.

L'espace des applications continues $(Y, y_0)^{(X_0, x_0)}$ de X dans Y, envoyant x_0 sur y_0, muni de la topologie canonique, est un A.N.R.

Pour une démonstration, voir Borsuk [1], chap. 4, § 5.

Produits.

THÉORÈME: 1) Un produit dénombrable d'A.R. est un A.R.

2) Un produit dénombrable d'A.N.R.: $\{ X_i \}_{i \in N}$ parmi lesquels tous les X_i sauf un nombre fini d'entre eux sont des A.R. est un A.N.R.

Un produit dénombrable d'A.N.R. n'est en général pas un A.N.R. comme le montre l'ensemble de Cantor.

Pour une démonstration, voir Borsuk, chap. 4, § 7.

§ 3. PROPRIÉTÉS HOMOTOPIQUES DES A.N.R.

Lemme: Soit X un espace métrisable. Soit $A \subset X$ un fermé. Soit $Z = X \times \{ 0 \} \cup A \times I \subset X \times I$. Alors, si V est un vg. de Z dans $X \times I$, il existe une application ρ de $X \times I$ dans V qui est l'identité sur Z.

(La démonstration de ce lemme est élémentaire.)

On déduit alors la proposition suivante:

Proposition: Soit X un métrisable, soit $A \subset X$ un fermé. Soit Y un A.N.R. Soit $F: X \to Y$ une application et soit $f_t: A \to Y$ une homotopie de $F \mid A = f_0$. Alors f_t s'étend en une homotopie $F_t: X \to Y$ telle que $F_0 = F$.

Preuve :

F et f_t définissent une application continue de Z dans Y. Comme Y est un A.N.R. cette application s'étend en une application $g: V \to Y$ où V est un certain voisinage de Z dans $X \times I$.

$g \circ \rho$: $X \times I \to Y$ est alors l'homotopie F_t cherchée.

C.q.f.d.

Corollaire : Un métrique X est un A.R. si et seulement si c'est un A.N.R. contractible.

Preuve :

Nous avons déjà vu qu'un A.R. est un A.N.R. contractible.

Pour démontrer la réciproque, on ne restreint pas la généralité en supposant que X est un fermé dans un convexe Q d'un Banach B.

Soit h_t: $X \to X$ une homotopie telle que:

$$h_0(X) = x_0 \in X \quad \text{et} \quad h_1 = id_X .$$

Soit H: $Q \to X$ l'application constante sur x_0.

Par la propriété d'extension des homotopies,

$$\exists\, H_t: Q \to X \text{ telle que } H_t \mid X = h_t.$$

L'application H_1 est alors une rétraction de Q sur X. Un rétracte d'un A.R. étant un A.R., la démonstration est achevée.

C.q.f.d.

Plusieurs propriétés homotopiques du A.N.R. découlent du fait qu'ils sont des rétractes de voisinages de convexes dans un E.V.T. localement convexe. Par exemple:

Proposition : Un A.N.R. est localement contractible.

Preuve :

On peut supposer que X est un fermé d'un convexe Q d'un Banach B et qu'il existe un ouvert $V \subset Q$ qui se rétracte sur X.

V est localement contractible et l'on voit facilement que tout rétracte d'un espace localement contractible est localement contractible.

C.q.f.d.

N. B. Un espace sera dit localement contractible s'il possède un système fondamental de voisinages contractibles.

Deux applications suffisamment proches d'un métrique dans un A.N.R. sont homotopes. De façon plus précise:

Proposition. Soit E un espace topologique et X un A.N.R. Alors, il existe un recouvrement ouvert $\{ U_\alpha \}_{\alpha \in J}$ de X tel que, si f et g sont deux applications de E dans X qui sont α-proches, alors elles sont homotopes.

Rappel. On dit que f et g sont α-proches, si $\forall x \in E$, il existe un ouvert U_α tel que $f(x)$ et $g(x) \in U_\alpha$.

Preuve :

A nouveau, considérons X comme un fermé dans un convexe Q d'un Banach B; et soit $V \subset Q$ un ouvert se rétractant sur X.

V étant localement convexe, on voit immédiatement que la conclusion de la proposition est vraie pour V.

X étant un rétracte de V, il est facile de voir que la conclusion reste vraie pour X.

C.q.f.d.

Définition. On dit qu'un espace A est dominé par un espace B s'il existe deux applications $f: A \to B$, $g: B \to A$, telles que $g \circ f$ soit homotope à id_A.

Proposition. Un A.N.R. est toujours dominé par un complexe simplicial (et donc par un C.W. complexe).

Avant de donner une idée de la démonstration, définissons ce que l'on entend par « complexe simplicial ».

C'est un C.W.-complexe pour lequel les modèles de cellules fermées sont les simplexes standards et les applications attachantes sont des applications simpliciales injectives.

Idée de la démonstration (cf. Palais [1], thm. 14).

On commence par démontrer le lemme suivant:

Lemme. Soit X paracompact. Soit $\{ W_\alpha \}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X. Alors, il existe un recouvrement ouvert $\{ 0_\beta \}_{\beta \in B}$ de X (plus fin que $\{ W_\alpha \}$), localement fini, tel que si $\bigcap_{i=1}^{n} 0_{\beta i} \neq \varnothing$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} 0_{\beta i} \subset W_\alpha$, pour un certain $\alpha \in A$.

(Palais, lemme 6.2.)

Une fois en possession de ce lemme, on poursuit la démonstration de la façon suivante:

Comme la relation « être dominé par » est transitive, on ne restreint pas la généralité en supposant que X est un ouvert d'un convexe contenu dans un E.V.T., localement convexe, métrisable.

On choisit un recouvrement ouvert $\{ W_\alpha \}_{\alpha \in A}$ de X par des ouverts convexes.

On choisit un recouvrement ouvert $\{ 0_\beta \}_{\beta \in B}$ de X, satisfaisant la conclusion du lemme.

Soit K le complexe simplicial associé au recouvrement $\{ 0_\beta \}_{\beta \in B}$; on considérera K comme réalisé géométriquement dans $\mathbf{R}^{(B)}$, les sommets de K étant les vecteurs de la base standard.

Comme d'habitude, une partition de l'unité, associée au recouvrement $\{ 0_\beta \}$ fournit une application f de X dans K.

Si, pour tout $\beta \in B$, on choisit un point $x_\beta \in 0_\beta$, on définit une application linéaire de $\mathbf{R}^{(B)}$ dans l'E.V.T., dont la restriction g à K a son image dans X, car si une intersection $\bigcap_{i=1}^{n} 0_{\beta i} \neq \varnothing$, l'enveloppe convexe de sa réunion $\subset W_\alpha$, et donc dans X.

Pour une raison analogue $g \circ f$ est homotope à id_X.

C.q.f.d.

N. B.: La même preuve montre que si X est séparable, il est dominé par un C.W.-complexe dénombrable et que s'il est compact il est dominé par un C.W. complexe fini.

§ 4. Relations entre A.N.R. et C.W. complexes

Rappelons pour commencer quelques définitions et un théorème.

Soient X et Y deux espaces topologiques connexes et soit $f: X \to Y$ telle que $f: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ soit un isomorphisme, $\forall n$. On dit que f est alors une équivalence d'homotopie faible.

Par opposition, une équivalence d'homotopie (usuelle) est parfois appelée équivalence d'homotopie forte.

Théorème: Si X et Y sont deux espaces topologiques connexes dominés par des C.W. complexes, une équivalence d'homotopie faible entre X et Y est nécessairement une équivalence d'homotopie forte.

(J. H. C. Whitehead, thm. 1.)

N. B.: On passe des espaces connexes aux espaces non-connexes de façon évidente. Par « connexe », on entend « connexe par arcs ».

Rappelons maintenant un théorème dû à J. H. C. Whitehead, Giever, Milnor, etc. Pour une démonstration, voir Milnor [1].

THÉORÈME: Soit X un espace topologique connexe. Alors X a le type d'homotopie faible d'un C.W. complexe.

Idée de la démonstration: (Cf. Milnor [1].)

Soit $S(X)$ l'ensemble semi-simplicial ayant pour n-simplexes les applications continues $\varphi: \Delta^n \to X$; et les opérateurs « faces » et « dégénérescences » évidents.

Soit $|S(X)|$ la réalisation géométrique de $S(X)$.

On a une application $f: |S(X)| \to X$ naturelle. En effet, soit x un point de $|S(X)|$ appartenant à la n-cellule $\varphi: \Delta^n \to X$. Par définition, f envoie x sur $\varphi(x)$.

La restriction de f à chaque cellule est évidemment continue. Par la propriété fondamentale de la topologie faible, f est continue.

Enfin, Milnor montre que f induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.

C.q.f.d.

Corollaire: Un espace topologique dominé par un C.W. complexe a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Corollaire: Un A.N.R. a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Corollaire: Un A.N.R. X est un A.R. si et seulement si $\pi_i(X) = 0 \forall i$.

Il est clair qu'un A.N.R. n'est pas homéomorphe à un C.W. complexe, en général.

Réciproquement, un C.W. complexe n'est généralement pas homéomorphe à un A.N.R. En effet, un C.W. complexe n'est, en principe, pas métrisable. On montre qu'un C.W. complexe est métrisable si et seulement s'il est localement fini. Dans ce cas, il est homéomorphe à un A.N.R. (voir Borsuk, chap. 4).

J'ignore si un C.W. complexe a toujours le type d'homotopie d'un A.N.R. En ce qui concerne les A.N.R. séparables, Milnor [2] rappelle que l'on a le théorème suivant:

THÉORÈME: Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

1) X est dominé par un C.W. complexe dénombrable;

2) X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe dénombrable;

3) X a le type d'homotopie d'un complexe simplicial dénombrable, localement fini;

4) X a le type d'homotopie d'un A.N.R. séparable.

Indiquons brièvement sur quoi repose la démonstration:

a) 1) $\Rightarrow$ 2) Ceci est essentiellement une astuce de Whitehead [2]. X étant dominé par un C.W. complexe, $f: |S(X)| \to X$ est une équivalence d'homotopie. Soit g un inverse de f. Soit, de plus, K un C.W. complexe dénombrable et soient $\lambda: X \to K$ et $\mu: K \to X$ telles que $\mu \circ \lambda \simeq id_X$. Soit: $g \circ \mu: K \to |S(X)|$. Comme K est dénombrable, l'image de K par cette application est contenue dans un sous-complexe L_1 de $|S(X)|$, dénombrable.

Soit $H_t: |S(X)| \to |S(X)|$ une homotopie reliant l'identité à $g \circ f$. Soit L_2 un complexe contenant l'image de L_1 par l'homotopie H. On peut choisir L_2 dénombrable. En itérant indéfiniment le procédé, on construit une suite de sous-complexes dénombrables $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots L_k$ étant un sous-complexe contenant l'image par H de L_{k-1}. On a $L_1 \subset L_2 \subset \ldots$.

Soit $L = \bigcup_k L_k$. L est dénombrable.

Soit $f_1 = f | L \to X$ et soit $g_1 = g \circ \mu \circ \lambda: X \to L$.

On vérifie facilement que $g_1 f_1 \simeq id$ et $f_1 \circ g_1 \simeq id$.

2) $\Rightarrow$ 3) est le théorème 13 de Whitehead [1].

3) $\Rightarrow$ 4) et 4) $\Rightarrow$ 1) résultent de ce qui précède.

Corollaire: L'espace des lacets itérés n-fois $\Omega^n K$ où K est un C.W. complexe dénombrable a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Ceci résulte du théorème précédent et du théorème de Kuratowski.

Whitehead remarque qu'un compact dominé par C.W. complexe est dominé par un C.W. complexe fini.

En conséquence, un A.N.R. compact est dominé par un polyèdre compact. (Cela résulte d'ailleurs aussi de la démonstration du théorème qui affirme qu'un A.N.R. est dominé par un C.W. complexe.)

Corollaire: L'homologie d'un A.N.R. compact est de type fini. Le groupe fondamental d'un A.N.R. compact est de présentation finie.

On démontre que, sur un A.N.R. compact, toutes les théories de l'homologie satisfaisant l'axiome de dimension coïncident.

(Borsuk, chap. 5.)

Problème : Est-ce qu'un A.N.R. compact X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe fini ?

Remarques: D'après ce qui précède, X a donc le type d'homotopie d'un C.W. complexe dénombrable, dominé par un C.W. complexe fini.

Or Wall a construit un exemple d'un C.W. complexe dénombrable dominé par un C.W. complexe fini, qui n'a pas le type d'homotopie d'un complexe fini. (Cf. Wall.)

Mais l'exemple de Wall n'implique pas que la réponse au problème précédent soit négative.

Si X est simplement connexe, il n'est pas difficile de voir que la réponse au problème est affirmative.

§ 5. Quelques exemples intéressants

A) On a le théorème suivant, dû à J. H. C. Whitehead.

Théorème: Soient X_1 et X_2 deux A.N.R. compacts (disjoints). Soit $X_0 \subset X_1$ un fermé qui soit aussi un A.N.R. Alors, si f_i: $X_0 \to X_2$ est une application continue, l'espace $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est un A.N.R. (compact).

Pour une démonstration, voir Borsuk [1], chap. 5, § 9. Si X_0, X_1, X_2 sont des A.R. compacts, alors $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est aussi un A.R. compact.

Ce théorème permet de construire des A.N.R. ou des A.R. qui ont une allure assez pathologique.

Par exemple : Soient

X_1 = un disque D^q fermé, $q \geqslant 2$;

X_0 = un segment fermé contenu dans l'intérieur de X_1;

X_2 = un disque D^n fermé, $n \geqslant q+1$;

f: $X_0 \to X_2$ une application continue surjective.

Alors l'espace $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est un A.R. compact. Il n'est pas homéomorphe à un complexe simplicial, ou à un C.W. complexe.

Plus généralement, partant d'un complexe simplicial fini, on peut s'amuser à faire cette construction un nombre fini de fois dans chaque simplexe, obtenant ainsi un A.N.R. compact qui n'est pas homéomorphe à un complexe simplicial.

Un tel exemple de « singularités » dans un A.N.R. s'appelle singularité de Péano, pour d'évidentes raisons.

(Voir Borsuk, chap. 6, § 1.)

B) En ce qui concerne les A.N.R. compacts de dimension finie, on a le théorème suivant:

THÉORÈME: Soit X un espace métrique compact, localement contractible, de dimension finie. Alors X est un A.N.R. Pour une démonstration, voir Borsuk, chap. 5, § 10.

Un exemple célèbre dû à Borsuk montre que la condition de dimension finie est essentielle. Voici brièvement décrit l'exemple de Borsuk. (Pour plus de détails, voir Borsuk, chap. 5, § 11.)

Soit Q le cube de Hilbert. On envisage les sous-espaces de Q suivants:

$$X_o = \{x = \{x_i\} \mid x_1 = 0\}$$

$$X_k = \left\{x = \{x_i\} \mid \frac{1}{k+1} \leq x_1 \leq \frac{1}{k}, \quad x_i = 0 \quad i > k\right\} . \; k = 1, 2, \ldots$$

On voit immédiatement que X_0 est homéomorphe au cube de Hilbert et que X_k est homéomorphe au cube de dimension k. Soit $\dot{X}^k$ le bord de X_k.

Soit $X = X_0 \underset{k \geqslant 1}{\cup} \dot{X}^k$.

X est fermé dans Q; c'est donc un métrique compact. Il est localement contractible. La démonstration est immédiate pour un point qui n'appartient pas à X_0, mais plus délicate pour un point qui appartient à X_0.

Enfin, $H_i(X; \mathbf{Z}) \neq 0 \; \forall i$, car $\dot{X}^{i+1}$ n'est pas homologue à zéro dans X.

Ceci montre que X n'est pas un A.N.R., car si c'était le cas, il serait dominé par un C.W. complexe fini et aurait donc tous ses groupes d'homologie nuls, sauf un nombre fini d'entre eux.

RÉFÉRENCES

BORSUK, K.: *Theory of Retracts.* Monografie Matematyczne Varsovie (1967).

DUGUNDJI, J.: An Extension of Tietze's Theorem. *Pacific Journal of Math.*, 1 (1951), pp. 353-367.

HANNER, O.: Some Theorems on Absolute Neighborhood Retracts. *Arkiv. for Math.*, 1 (1951), pp. 389-408.

MILNOR, J. [1]: The Geometric Realisation of a Semi-simplicial Complex. *Annals of Math.*, 65 (1957), pp. 357-362.

MILNOR, J. [2]: On Spaces Having the Homotopy Type of a C.W. complex. *Transactions A.M.S.*, 90 (1959), pp. 272-280.

PALAIS, R.: Homotopy Theory of Infinite Dimensional Manifolds. *Topology*, 5 (1966), pp. 1-14.

WALL, C. T. C.: Finiteness Conditions for C.W. complexes. *Annals of Math.*, 81 (1965), pp. 56-69.

WHITEHEAD, J. H. C. [1]: Combinatorial Homotopy I. *Bulletin A.M.S.*, 55 (1949), pp. 453-496.

WHITEHEAD, J. H. C. [2]: A Certain Exact Sequence. *Annals of Math.*, 52 (1950), pp. 51-110.

Institut Mathématique
Université
Genève.

(Reçu le 15 février 1968.)