Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1968)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE CLASSE DE PROPRIÉTÉS COMMUNES A QUELQUES TYPES DIFFÉRENTS D'ALGÈBRES
Autor: Nijenhuis, Albert
Kapitel: Partie I : Quelques types d'algèbres
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42353

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La matière de cet article a été puisée à différentes sources. L'inclusion dans le texte de notes bibliographiques n'a pas semblé pratique: à la place, chaque partie se termine par quelques-unes de ces notes dans une section séparée. En allant aux sources indiquées, le lecteur trouvera des discussions plus complètes des sujets traités et aussi d'autres sujets qui bien que liés n'ont pu être mentionnés par manque de place.

Je considère comme un honneur de dédier cet article à J.A. Schouten, à l'occasion de son 85e anniversaire, et en reconnaissance de sa contribution à la théorie des invariants tensoriels. Il y a quelque dix ans son approche a contribué de façon substantielle à éclaircir le terrain de la théorie de la déformation.

Partie I : *Quelques types d'algèbres*

1. *Algèbres associatives et algèbres de Lie.*

La propriété caractéristique d'une algèbre est que l'ensemble sous-jacent de ses éléments V a la structure d'un espace vectoriel (nous nous bornerons de façon constante au cas de la dimension finie et au cas réel). La structure additive de V fournit l'addition de l'algèbre. La multiplication s'exprime en donnant une application $\mu : V \times V \to V$. En accord avec la structure d'espace vectoriel de V nous supposerons toujours que μ est bilinéaire (c.-à-d. que $\mu(x, y)$ est linéaire séparément en x et en y). Les propriétés de V et de μ assurent alors que l'addition est commutative et associative, et que l'addition et la multiplication vérifient les lois distributives.

L'application produit μ est entièrement déterminée par un ensemble de constantes de structure (c^k_{ij}): soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V, alors pour chaque i et j entre 1 et n, $\mu(e_i, e_j)$ est un élément de V et ses composantes $c^1_{ij}, \ldots, c^n_{ij}$ sont les constantes de structure:

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_k c^k_{ij} e_k .$$

Tout ce qui est dit à l'aide de μ peut être reformulé à l'aide des constantes de structure.

Jusqu'ici rien n'a été dit sur l'associativité de la multiplication, ou sur quelque autre propriété du produit.

En fait, la définition générale d'une algèbre n'englobe aucune condition de ce type. Naturellement, cependant, les algèbres sont appelées commutatives si $xy = yx$, associatives si $x(yz) = (xy)z$. D'autres possibilités sont mentionnées plus tard. Alors que les algèbres commutatives et associatives ont été les plus importantes et que de nombreux développements modernes

très fameux dépendent lourdement d'elles, elles ne sont pas particulièrement intéressantes de notre point de vue assez particulier. Quoique nous pourrions les inclure, nous ne leur attacherons, par souci de brièveté, aucune attention particulière.

Les algèbres associatives sont assez bien connues. L'exemple le plus classique est peut-être celui des matrices réelles $n \times n$, avec le produit usuel lignes par colonnes. Parmi les sous-algèbres nous avons par exemple les matrices avec seulement des zéros en-dessous de la diagonale principale; nous les appellerons triangulaires supérieures. Un autre exemple fameux est formé par les quaternions. Les nombres complexes forment un exemple qui se trouve être commutatif. Les dimensions des exemples sont respectivement n^2, $\frac{1}{2} n (n+1)$, 4 et 2. Tandis que dans les algèbres les produits sont habituellement désignés par un point: $x \,.\, y$ ou par « rien »: xy, nous utiliserons explicitement $\mu(x, y)$ quand cela sera commode pour quelque dessein. Avec cette notation, la condition d'associativité devient

$$\mu(\mu(x, y), z) - \mu(x, \mu(y, z)) = 0 .$$

Les algèbres de Lie ont trouvé leur origine ou du moins leur utilité initiale dans des domaines près par tradition des applications physiques. Leur respectabilité mathématique s'est accrue grandement quand elles eurent perdu leur nom d'origine de « groupe infinitésimal ». Tout groupe de Lie (groupe continu) a son algèbre de Lie. Le dernier concept est beaucoup moins compliqué que le premier; cependant de nombreuses propriétés du groupe trouvent de fortes images dans l'algèbre. Parmi les exemples les plus simples d'algèbre de Lie citons, par exemple, les matrices $n \times n$ avec comme produit $\mu(x, y) = xy - yx$, les matrices antisymétriques avec le même produit, et l'espace euclidien à 3 dimensions avec le produit « croisé». En fait, ces algèbres de Lie peuvent être associées aux groupes suivants: le groupe de toutes les matrices inversibles $n \times n$, le groupe des matrices orthogonales $n \times n$ et le groupe des rotations de l'espace à 3 dimensions. Leurs dimensions respectives sont n^2, $\frac{1}{2} n (n-1)$ et 3.

La définition d'une algèbre de Lie est simple: le produit est antisymétrique et vérifie l'identité appelée identité de Jacobi. Au moyen de μ cela signifie que

$$\mu(x, y) = -\mu(y, x) , \quad \mu(\mu(x, y), z) + \mu(\mu(\mu(y, z), x) + \\ + \mu(\mu(z, x) , y) = 0 .$$

De façon traditionnelle, le produit d'une algèbre de Lie est noté par des crochets $[x, y]$. Les puristes insistent pour que ce soit xy puisqu'on utilise

aussi xy quand le produit ne vérifie aucune condition particulière. Pour satisfaire au moins partiellement les puristes nous utiliserons les crochets seulement pour les commutateurs (c.-à-d. $[x, y]=xy-yx$) et pour certaines algèbres de Lie graduées qui apparaîtront dans les parties II et III. Dans les autres cas, nous éviterons la controverse en utilisant μ.

2. *Les algèbres de Vinberg.*

L'application produit μ d'une algèbre de Vinberg vérifie la condition suivante

$$(1)\quad \mu(\mu(x, y), z) - \mu(x, \mu(y, z)) - \mu(\mu(y, x), z) + \mu(y, \mu(x, z)) = 0\,,$$

ou, avec des notations moins conventionnelles où $xy = \mu(x, y)$

$$(xy)\,z - x\,(yz) = (yx)\,z - y\,(xz)\,.$$

Avec encore d'autres notations: si L_x désigne la multiplication à gauche par x, $L_x y = xy = \mu(x, y)$ de telle sorte que L_x est une application linéaire de V dans V, on peut écrire la condition sous la forme

$$L_x L_y - L_y L_x = L_{xy-yx}\,.$$

Si nous introduisons des commutateurs notés par des crochets, nous obtenons

$$(1')\quad [L_x, L_y] = L_{[x,y]}\,.$$

La dernière forme de la condition suggère déjà que les algèbres de Vinberg sont liées de près aux algèbres de Lie. De façon plus précise, nous avons le

THÉORÈME. *Si V est un espace vectoriel et μ une application bilinéaire de V dans V qui vérifie la condition* (1) *et si, de plus, $\hat{\mu}(x, y) = \mu(x, y) - \mu(y, x)$, alors $\hat{\mu}$ définit une structure d'algèbre de Lie.*

Le théorème généralise le fait bien connu que les commutateurs d'une algèbre associative donnent une algèbre de Lie. La vérification pour $\hat{\mu}$ de l'identité de Jacobi (c'est tout ce qui est à prouver) suit directement de l'écriture et du regroupement des 12 termes que l'on trouve.

Dans la pratique, les algèbres de Vinberg apparaissent dans l'autre sens. Tout d'abord on a trouvé une structure d'algèbre de Lie; ensuite on essaye de trouver une structure plus fine pour laquelle les commutateurs donnent la structure première d'algèbre de Lie. On peut préférer trouver des struc-

tures d'algèbre associative mais c'est à vrai dire un problème plus difficile — l'existence étant connue dans moins de cas — que celui que nous considérons ici. Le seul point qu'on peut ici noter est qu'une structure d'algèbre de Vinberg est plus fine qu'une structure d'algèbre de Lie et que les algèbres associatives en sont un cas particulier.

Quoique les algèbres de Vinberg viennent de situations géométriques où l'on considère certains ensembles ouverts convexes homogènes des espaces affines, nous ne nous intéresserons pas nous-mêmes à ces applications. A la place, nous donnons quelques exemples construits algébriquement d'algèbres de Vinberg.

Tout d'abord un exemple à 2 dimensions. Soit P, Q les vecteurs de base; le produit est donné alors par

$$\mu(P,P) = 2P \qquad \mu(Q,P) = 0$$

$$\mu(P,Q) = Q \qquad \mu(Q,Q) = P$$

La vérification de (1) est une simple question d'énumération de cas. Le produit de Lie pour les commutateurs est donné par $\hat{\mu}(P, Q) = Q$; c'est le seul cas d'une algèbre de Lie non abélienne à deux dimensions. (Pour une structure d'algèbre de Lie sur un espace vectoriel à 2 dimensions ou bien on a une isomorphie avec la précédente ou bien tous les produits valent zéro.)

Pour le second exemple, considérons l'application τ qui assigne à chaque matrice $n \times n$ (n reste fixe) la matrice triangulaire supérieure obtenue en remplaçant les éléments sous la diagonale principale par zéro, en divisant les éléments de la diagonale principale par 2 et en laissant inchangés les éléments situés au-dessus de la diagonale principale. On désigne la transposée d'une matrice a par a^t. L'exemple consiste en matrices triangulaires supérieures notées x, y, etc. La dimension de l'espace est $\frac{1}{2}n(n+1)$. Le produit de l'espace est donné par

$$\mu(x, y) = xy + \tau(xy^t + yx^t).$$

Comme première observation, nous voyons que l'on a $\hat{\mu}(x, y) = xy - yx$, car l'expression du terme en τ est symétrique en x et en y. Par suite la structure en question est un raffinement de la structure habituelle d'algèbre de Lie sur les matrices triangulaires supérieures.

La vérification de (1) est juste un peu intrigante quoiqu'il n'y ait pas de difficultés essentielles. Notons que pour prouver (1), nous devons montrer que $\mu(\mu(x, y), z) - \mu(x, \mu(y, z))$ est symétrique en x et y.

Premièrement le premier terme.

$$\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,y)\,z + \tau\left(\mu(x,y)\,z^t + z\,(\mu(x,y))^t\right) =$$

$$= (xy)\,z + \tau(xy^t + yx^t)\,z + \tau\left((xy)\,z^t + \tau(xy^t + yx^t)\,z^t + \right.$$

$$\left. + z\,(xy)^t + z\,(\tau(xy^t + yx^t))^t\right) = xyz + \tau(xyz^t + zy^tx^t) + sym.$$

où « sym » note une expression symétrique en x et y. Le second terme est écrit ainsi qu'il suit.

$$\mu(x,\mu(y,z)) = x\mu(y,z) + \tau\left(x\,(\mu(y,z))^t + \mu(y,z)\,x^t\right) =$$

$$= x\,(yz) + x\tau(yz^t + zy^t) + \tau\left(x\,(yz)^t + x\left(\tau(yz^t + zy^t)\right)^t + \right.$$

$$\left. + (yz)\,x^t + \tau(yz^t + zy^t)\,x^t\right)$$

Aux termes en τ intérieurs aux termes en τ nous appliquons les identités, valables quelles que soient les matrices symétriques s,

$$\tau(s) = s - \tau(s)^t \quad \text{et} \quad \tau(s)^t = s - \tau(s)\,.$$

Ces termes sont ainsi changés en

$$x(yz^t + zy^t) - x\tau(yz^t + zy^t) + (yz^t + zy^t)\,x^t - \left(\tau(yz^t + zy^t)\right)^t x$$

C'est tout ce qui doit être placé à l'intérieur du premier opérateur τ. Pour le second et le quatrième termes cela donne, vu l'égalité, valable pour toute matrice triangulaire supérieure w, $w = \tau(w + w^t)$

$$\tau\left(-x\tau(yz^t + zy^t) - \left(\tau(yz^t + zy^t)\right)^t x^t\right) = -x\tau(yz^t + zy^t)\,.$$

Ce dernier terme supprime un des termes précédents. Ainsi, en les mettant tous ensemble, on trouve

$$\mu(x,\mu(y,z)) = xyz + \tau\left(xz^ty^t + yzx^t + x\,(yz^t + zy^t) + (yz^t + zy^t)\,x^t\right)$$

$$= xyz + \tau(xyz^t + zy^tx^t) + \tau(xz^ty^t + yz^tx^t + yzx^t + xzy^t)$$

$$= \mu(\mu(x,y)\,,z) + sym.\,,$$

ce qu'on devait montrer.

3. *Modules.*

Les abstractions mathématiques, comme celles de groupe, d'anneau ou d'algèbre, sont venues historiquement comme opérations sur certains ensembles. Les ensembles, disons de cailloux, de moutons ou de femmes, étaient familiers longtemps avant les entiers qui les comptent. Les permutations sur les ensembles étaient connues avant le concept de groupe.

Les modules sont des ensembles convenablement structurés sur lesquels agissent des algèbres. Soit V une algèbre ayant pour produit μ. Alors un module sur (V, μ) est un espace vectoriel M sur lequel les éléments de V agissent de façon à respecter la structure d'espace vectoriel de M. La structure d'espace vectoriel de V doit aussi être respectée; et, de plus, la multiplication μ de V doit être convenablement retrouvée. La discussion des exemples qui suivent rend tout cela plus précis.

Soit (V, μ) une algèbre associative. Un espace vectoriel M est un *module à gauche* sur (V, μ) si on s'est donné une application bilinéaire λ :

$V \times M \to M$ ($\lambda(x, m)$ est aussi noté xm) vérifiant

$$x(ym) = (xy)\, m \text{ ; c'est-à-dire } \lambda(x, \lambda(y, m)) = \lambda(\mu(x, y), m).$$

Notons que la bilinéarité implique les lois distributives habituelles. — Un *module à droite* est de façon analogue défini par une application bilinéaire $\rho : M \times V \to M$ (on note mx en abrégé pour $\rho(m, x)$) telle que

$$(mx)\, y = m(xy), \quad \text{ou} \quad \rho(\rho(m, x), y) = \rho(m, \mu(x, y)).$$

Une *structure de bimodule* est donnée par les applications λ et ρ comme ci-dessus, avec la condition additionnelle que les actions de gauche et de droite commutent; c'est-à-dire que

$$(xm)\, y = x(my), \quad \text{ou} \quad \rho(\lambda(x, m), y) = \lambda(x, \rho(m, y)).$$

En fait, les modules à gauche (et à droite) sont des cas particuliers des bimodules si on le souhaite: il suffit de poser $\rho = 0$ (resp. $\lambda = 0$). Nous nous limiterons donc aux bimodules quand nous le voudrons.

Le module (à gauche) sur l'algèbre associative des matrices $n \times n$ historiquement le plus naturel est peut-être l'espace vectoriel R^n des n-uples de nombres réels. $\lambda(x, m)$ est simplement le produit usuel ligne par colonne de la matrice x et du vecteur colonne m. Une structure de module à droite est donnée par $\rho(m, x) = mx$, où à nouveau on emploie le produit ligne par colonne et où m est un vecteur ligne. L'espace entier des matrices $n \times n$ est lui-même un bimodule sur lui-même si on utilise les multiplications à droite et à gauche habituelles.

Le dernier commentaire est général: une algèbre associative est toujours un bimodule sur elle-même. De plus, les idéaux à gauche sont des modules à gauche, les idéaux à droite des modules à droite et les idéaux bilatères sont des bimodules.

Retournons à la définition d'un bimodule sur une algèbre associative et essayons de la simplifier en considérant d'un seul coup toutes les opéra-

tions: μ, λ et ρ et en les combinant en une seule application. A cette fin, considérons le produit direct $W = V \times M$ dont les éléments sont les paires (x, m) d'éléments de V et de M. W est encore un espace vectoriel. Considérons l'application $\bar{\mu} : W \times W \to W$ donnée par

$$\bar{\mu}\big((x, m), (y, n)\big) = \big(\mu(x, y), \lambda(x, n) + \rho(m, y)\big). \tag{2}$$

Elle est clairement bilinéaire. $V \times M$ muni du produit $\bar{\mu}$ est appelé *produit semi-direct* de V et de M. Pour examiner $\bar{\mu}$, écrivons x pour $(x, 0)$ et m pour $(0, m)$ (cela peut être fait sans risque de confusion si V et M sont des espaces distincts). Nous avons alors

$$\bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y) \qquad \bar{\mu}(m, y) = \rho(m, y)$$
$$\bar{\mu}(x, m) = \lambda(x, m) \qquad \bar{\mu}(m, n) = 0$$

Les conditions imposées à μ (associativité), λ (structure de module à gauche) et à ρ (structure de module à droite) et la compatibilité de λ et de μ peuvent maintenant être toutes exprimées au moyen de $\bar{\mu}$. La tâche est classique et le résultat est un théorème.

THÉORÈME. *Soit V et M des espaces vectoriels, $\mu : V \times V \to V$, $\lambda : V \times M \to M$ et $\rho : M \times V \to M$ des applications bilinéaires. Soit $W = V \times M$ le produit semi-direct muni de $\bar{\mu}$ défini par* (2). *Alors $\bar{\mu}$ définit une structure d'algèbre associative sur W si et seulement si sont vérifiées les deux assertions suivantes :* (1) *μ est une structure d'algèbre associative sur V;* (2) *λ et ρ définissent sur M une structure de bimodule.*

Une situation semblable se trouve dans le cas des algèbres de Lie, excepté que là il suffit de considérer uniquement les modules à gauche (ou à droite); d'autres cas peuvent être réduits à celui-là. De façon à ce que M soit un module sur l'algèbre de Lie (V, μ) on doit se donner une application bilinéaire $\lambda : V \times M \to M$ (on peut écrire xm pour $\lambda(x, m)$) qui vérifie

$$\lambda\big(x, \lambda(y, m)\big) - \lambda\big(y, \lambda(x, m)\big) = \lambda\big(\mu(x, y), m\big),$$

ou

$$x(ym) - y(xm) = \mu(x, y)\, m .$$

Un module sur une algèbre de Lie est fréquemment appelé une représentation. De façon plus précise, si M est un module sur V (de produit μ) à l'aide de l'application λ, alors λ est appelé une représentation de (V, μ) sur M.

On trouve facilement des exemples de modules sur des algèbres de Lie: chaque module sur une algèbre associative donne naissance à un tel module.

Toute algèbre de Lie de matrices (par exemple celle des matrices symétriques gauche) donne à R^n une structure de module si l'on prend le produit habituel ligne par colonne. Toute algèbre de Lie est un module sur elle-même. Les idéaux d'une algèbre de Lie sont aussi des modules sur l'algèbre de Lie.

Comme dans le cas associatif, nous construisons une application bilinéaire $\bar{\mu}$ du produit semi-direct $W = V \times M$ en utilisant μ et λ ainsi qu'il suit.

$$\bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y) \qquad \bar{\mu}(m, x) = -\lambda(x, m)$$
$$\bar{\mu}(x, m) = \lambda(x, m) \qquad \bar{\mu}(m, n) = 0$$

ou en une seule formule

$$\bar{\mu}\big((x, m), (y, n)\big) = \big(\mu(x, y), \lambda(x, n) - \lambda(y, m)\big). \tag{3}$$

On a, comme auparavant, un théorème.

THÉORÈME. *Soit V et M des espaces vectoriels, $\mu : V \times V \to V$ une application bilinéaire alternée et $\lambda : V \times M \to M$ une application bilinéaire. Soit $W = V \times M$ le produit semi-direct où $\bar{\mu}$ est défini par* (3). *Alors $\bar{\mu}$ définit une structure d'algèbre de Lie sur W si et seulement si est vérifiée la condition suivante : μ est une structure d'algèbre de Lie sur V et λ définit sur M une structure de module sur V.*

La raison principale pour formuler les deux théorèmes précédents bien connus est de fournir un motif pour la définition d'un module sur une algèbre de Vinberg. Soit V une algèbre de Vinberg de produit μ, et soit des applications bilinéaires $\lambda : V \times M \to M$ et $\rho : M \times V \to V$. Posons $W = V \times M$ et définissons $\bar{\mu}$ comme l'application donnant à $V \times M$ la structure d'un produit semi-direct:

$$\bar{\mu}\big((x, m), (y, n)\big) = \big(\mu(x, y), \lambda(x, n) + \rho(m, y)\big). \tag{4}$$

Alors nous appellerons M, muni de l'action de V sur lui défini à l'aide de λ et de ρ, un module sur V si et seulement si W est une algèbre de Vinberg de produit $\bar{\mu}$. Ainsi, la définition revient à une écriture:

DÉFINITION. Soit V une algèbre de Vinberg de produit μ et M un espace vectoriel. Supposons bilinéaires les applications $\lambda : V \times M \to M$ et $\rho : M \times V \to M$. Alors λ, ρ définissent une structure de bimodule sur M au-dessus de V si valent les conditions suivantes:

$$\lambda(x, \lambda(y, m)) - \lambda(\mu(x, y), m) = \lambda(y, \lambda(x, m)) - \lambda(\mu(y, x), m),$$
$$\lambda(x, \rho(m, y)) - \rho(\lambda(x, m), y) = \rho(m, \mu(x, y)) - \rho(\rho(m, x), y).$$

Avec des notations plus conventionnelles ces conditions deviennent

$$(5) \qquad x(ym) - y(xm) = [x, y]\, m \qquad \text{où} \qquad [x, y] = xy - yx\,,$$

$$(6) \qquad x(my) - (xm)\, y = m(xy) - (mx)\, y\,.$$

La condition (5) peut s'exprimer très simplement par des mots: l'action gauche d'une algèbre de Vinberg sur un module est une action de l'algèbre de Lie associée (de produit $\hat{\mu}(x, y) = \mu(x, y) - \mu(y, x)$). La condition (6) peut s'exprimer comme il suit: le côté gauche mesure à quel point l'action gauche et l'action droite ne réussissent pas à commuter; le côté droit à quel point l'action droite ne réussit pas à être associative. Classiquement (i.e. dans le cas associatif) les deux côtés valent zéro; ici ils sont seulement égaux.

Notons qu'un module *gauche* sur une algèbre de Vinberg est facile à définir par la condition (5). C'est seulement dans le cas où l'action gauche vaut zéro qu'il est raisonnable de définir une structure de module à *droite*; par (6) l'action droite est alors associative.

Des exemples de modules sur des algèbres de Vinberg sont tout d'abord l'algèbre elle-même et tout idéal bilatère d'une algèbre de Vinberg. Un exemple plus intéressant est peut-être le suivant:

V est une algèbre de Vinberg arbitraire. Pour M prenons l'espace linéaire de toutes les applications linéaires: $\alpha : V \to V$. (Le choix d'une base pour V associe à chaque α une matrice, de telle sorte que M peut être considéré comme l'espace des matrices $n \times n$, si $n = \dim V$.) Parmi les éléments de M figurent les opérateurs de multiplication à gauche L_x. Les produits $\lambda(x, \alpha)$ et $\rho(\alpha, y)$ sont maintenant donnés par

$$\lambda(x, \alpha) = [L_x, \alpha] + L_{\alpha x}\,,$$

$$\rho(\alpha, y) = L_{\alpha y}\,.$$

Dans ce qui précède, αx est l'image de x par l'application α; elle appartient encore à V de sorte que $L_{\alpha x}$ a un sens.

Premièrement nous vérifions (5), avec des notations appropriées.

$$\lambda(x, \lambda(y, \alpha)) = \lambda(x, [L_y, \alpha] + L_{\alpha y}) =$$

$$= [L_x, [L_y, \alpha] + L_{\alpha y}] + L_{([L_y, \alpha] + L_{\alpha y})x} =$$

$$= [L_x, [L_y, \alpha]] + [L_x, L_{\alpha y}] + L_{y(\alpha x) - \alpha(yx) + (\alpha y)x}\,.$$

Les applications linéaires $V \to V$ forment une algèbre de Lie relativement à la formation des crochets; nous utiliserons cela pour le premier terme

du dernier membre. Pour le nouveau premier terme qui en résulte et pour le second terme nous employons (1′). Nous obtenons ainsi:

$$\lambda(x, \lambda(y, \alpha)) - \lambda(y, \lambda(x, \alpha)) =$$

$$= [[L_x, L_y], \alpha] + L_{[x,\alpha y]} - L_{[y,\alpha x]} + L_{y(\alpha x)-\alpha(yx)+(\alpha y)x}$$

$$- L_{x(\alpha y)-\alpha(xy)+(\alpha x)y} = [L_{[x,y]}, \alpha] + L_*,$$

avec

$$* = x(\alpha y) - (\alpha y)x - y(\alpha x) + (\alpha x)y + y(\alpha x) - \alpha(yx) + (\alpha y)x$$

$$- x(\alpha y) + \alpha(xy) - (\alpha x)y = \alpha(xy) - \alpha(yx) = \alpha[x, y].$$

Ainsi,

$$\lambda(x, \lambda(y, \alpha) - \lambda(y, \lambda(x, \alpha)) = \lambda([x, y], \alpha),$$

c'est justement (5). Maintenant nous vérifions (6).

$$\lambda(x, \rho(\alpha, y)) - \rho(\lambda(x, \alpha), y) = \lambda(x, L_{\alpha y}) - L_{\lambda(x,\alpha)y} =$$

$$= [L_x, L_{\alpha y}] + L_{L_{\alpha y}x} - L_{[L_x,\alpha]y} + L_{\alpha x y} =$$

$$= L_{[x,\alpha y]} + L_{(\alpha y)x - x(\alpha y)+\alpha(xy)-(\alpha x)y} = L_{\alpha(xy)} - L_{(\alpha x)y} =$$

$$= \rho(\alpha, xy) - \rho(L_{\alpha x}, y) = \rho(\alpha, \mu(x, y)) - \rho(\rho(\alpha, x), y).$$

L'exemple précédent est seulement un cas particulier d'un théorème dont la preuve est un exercice utile.

THÉORÈME. *Supposons que M est un module sur l'algèbre de Vinberg V. Alors l'ensemble $M' = Hom(V, M)$ des applications linéaires de V dans M a aussi une structure de module sur V. En fait, si μ, λ et ρ ont leur signification habituelle et si λ', ρ' se réfèrent à M', alors, pour $\alpha \in M'$*

$$\lambda'(x, \alpha)y = \lambda(x, \alpha y) - \alpha\mu(x, y) + \rho(\alpha x, y),$$

$$\rho'(\alpha, x)y = \rho(\alpha x, y).$$

Dans le théorème de la section 2 nous avons signalé que la formation des commutateurs d'une algèbre de Vinberg conduit à une structure d'algèbre de Lie. Ce théorème peut être appliqué au produit semi-direct $V \times M$. On obtient alors.

THÉORÈME. *Soit* (V, μ) *une algèbre de Vinberg et* M *un module sur cette algèbre, avec* λ, ρ *comme actions gauche et droite. L'application* $\hat{\lambda}$, *avec* $\hat{\lambda}(x, m) = \lambda(x, m) - \rho(m, x)$ *munit alors* M *d'une structure de module sur l'algèbre de Lie* $(V, \hat{\mu})$.

L'application de ce théorème à l'exemple précédent donne $\hat{\lambda}(x, \alpha) = [L_x, \alpha]$; i.e. l'une des structures habituelles sur M. Ainsi l'exemple montre que λ, ρ est un raffinement de la structure de module bien connue $\hat{\lambda}$.

Il est alors clair que si M est un module sur une algèbre de Vinberg, il a deux structures de module sur l'algèbre de Lie associée. La première est donnée par le théorème ci-dessus; la seconde est obtenue à partir du théorème en changeant ρ en zéro: cela donne la même structure que celle donnée directement par la condition (5).

On veut espérer avoir une troisième structure de module sur l'algèbre de Lie associée en prenant $\lambda = 0$ — mais cela ne marche pas, car (6) suppose déjà λ. Dans le cas associatif, cependant, cette troisième méthode marche également.

PARTIE II: *Algèbres associatives et applications multilinéaires*

Introduction.

Une classe intéressante de propriétés des algèbres associatives devient accessible si l'on considère les applications multilinéaires dans lui-même de l'espace vectoriel sous-jacent. Le produit μ de l'algèbre fournit un opérateur δ qui associe à une application linéaire d'ordre n une application linéaire d'ordre $n + 1$. On peut exprimer à l'aide de l'opérateur δ des propriétés connues de l'algèbre. En général, les calculs avec δ (comme de prouver que $\delta^2 = 0$) sont assez encombrants. Cependant, en introduisant un « produit de composition » qui associe à tout couple formé d'une application linéaire d'ordre m et d'une application linéaire d'ordre n une application linéaire d'ordre $n + m - 1$, et en prouvant la seule identité (9), on fait presque tout le travail. (Il se trouve que (9) est une version inversée et graduée de l'identité de Vinberg.) Les commutateurs du produit de composition vérifient les axiomes d'une algèbre de Lie graduée. On montre que l'opérateur δ est le commutateur avec l'application produit μ. On définit la cohomologie associée à δ et on expose ses relations vis-à-vis des dérivations et des extensions. Du système des applications multilinéaires la cohomologie hérite d'une structure graduée de Lie. Cette dernière et la cohomologie sont appliquées dans la théorie des déformations des algèbres associatives.