4. Classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe associé a un G-fibré principal

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4. Classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe associé a un G-fibré principal

(*G* groupe de Lie réel compact)

Considérons un fibré vectoriel sur X de la forme $\xi = P[\mathbf{C}^n]$, où P est un G-fibré principal et $\mathbf{C}^n$ le G-espace d'une représentation $\phi : G \to U_n$. Soit T un tore contenu dans G. On peut supposer à une conjuguaison près, que $\phi(T) \subset T'$ où T' est le tore maximal $\begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$ de U_n.

Si $q : E(P)/T \to X$ est l'application canonique $xT \mapsto \pi(x)$, on sait que $q^*\xi$ est associé au T-fibré principal P_T, $\mathbf{C}^n$ étant cette fois le T-espace déterminé par $\phi \mid T$. Le j^{ieme} facteur $\mathbf{C}_i$ de $\mathbf{C}^n$ est le T-espace de la représentation $\phi_i = p_i \circ \phi \mid T \in \mathrm{Hom}(T, U_1)$, p_i étant la projection de T' sur le i^{eme} facteur. Le T-espace $\mathbf{C}^n$ étant somme directe des T-espaces $\mathbf{C}_i$, on a $q^*\xi = \bigoplus_i P_T[\mathbf{C}_i]$. En posant $\xi_i = P_1[\mathbf{C}_i]$ on a $c(\xi_i) = 1 + \chi(\xi_i)$ et $\chi(\xi_i) = \mu_{P_T}(\phi_i) = \tau_{P_T}(\omega_i)$; avec $\omega_i = \nu(\phi_i) \in H^1(T; \mathbf{Z})$. Donc $c(q^*\xi) = \prod c(\xi_i) = \prod (1 + \tau_{P_T}(\omega_i))$ c'est-à-dire:

$$q^*(c(\xi)) = \prod_i (1 + \tau_{P_T} \omega_i) \in H^*(E(P)/T; \mathbf{Z})$$

Remarques :

1) Si $G = U_m$, $T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$, $(U_1 \dots U_1)$, alors q^* est injectif en vertu du *principe de clivage* (cf. appendice) appliqué au fibré vectoriel $\zeta = P[\mathbf{C}^m]$, où $\mathbf{C}^m$ est le U_m-espace canonique. En effet, $E(P)/T$ n'est autre que l'espace $DU(\zeta)$(cf. appendice, remarque 1), homotopiquement équivalent à l'espace $D(\zeta)$ des drapeaux de ζ.

2) Si $G = U_n$, $\phi =$ identité,

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & U_1 \end{pmatrix}$$

alors ξ_i n'est autre qu'un des fibrés vectoriels obtenus par le principe de clivage appliqué à ξ. Dans ce cas $\phi_i = p_i$ et $\alpha(p_i)$ est la fonction coordonnée x_i sur l'algèbre de Lie $\mathbf{R}^n$ de T.

3) On peut obtenir la formule ci-dessus sans utiliser la factorisation $q^*\xi = \oplus\, \xi_i$, mais seulement en utilisant 2) et la naturalité de la transgression. En effet, factorisons q en

$$E(P)/T \xrightarrow{r} E({}_\phi P)/T' \xrightarrow{s} X$$

où $r(xT) = (x \times 1)\, T'$ pour $x \in E(P)$ et $s(yT') = yU_n$ pour $y \in E({}_\phi P)$. Comme $E({}_\phi P/T')$ est homotopiquement équivalent à l'espace des drapeaux $D(\xi)$, on a

$$s^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{{}_\phi P_{T'}} \circ v(p_i))$$

d'après 2). Par naturalité de la transgression,

$$r^* \circ s^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{P_T} \circ \phi^* \circ v(p_i)),$$

donc

$$q^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{P_T} \circ v(\phi_i)) = \prod (1 + \tau_{P_T}(\omega_i))$$

en posant $\phi_i = p_i \circ \phi$ et $\omega_i = v(\phi_i)$.

5. Classe de Chern d'un espace homogène presque complexe

En utilisant les notations du §1, soit G/U un espace homogène, dont le fibré tangent ξ est muni d'une structure complexe J invariante par G. On va chercher les composantes irréductibles de la représentation isotrope complexe ι^J restreinte à un tore T contenu dans U. On désignera par g et u les algèbres de Lie de G et U.

On va d'abord voir que ι^J est induite par $Ad : G \to Aut_R\, \mathfrak{g}$, cette dernière étant définie par $g \mapsto d\sigma_g(1)$, où σ_g est l'automorphisme intérieur de G déterminé par $g \in G$. En effet, si $\pi : G \to G/U$ est l'application canonique, on a $d\pi(1) \circ Ad\, u = d(\pi \circ \sigma_u)(1) = \iota(u) \circ d\pi(1)$ pour $u \in U$, puisque $\pi \circ \sigma_u(g) = ugU = u \circ \pi(g)$, en interprétant u comme translation à gauche de G/U. Donc $Ad\, u$, $u \in U$, est un automorphisme de la suite exacte $0 \to \mathfrak{u} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{d\pi} (G/U)_0 \to 0$, induisant l'automorphisme $\iota(u)$ de $(G/U)_0$. Complexifions cette suite exacte. Alors:

1) La représentation $\iota^J \otimes 1$ de U dans $(G/U)_0 \otimes \mathbf{C}$ est équivalente à $\iota^{-J} \oplus \iota^{-J}$, où ι^J est la représentation conjuguée de ι^J. Cela résulte du fait que