# 5. Classe de Chern d'un espace homogène presque complexe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

alors $\xi_i$ n'est autre qu'un des fibrés vectoriels obtenus par le principe de clivage appliqué à $\xi$. Dans ce cas $\phi_i = p_i$ et $\alpha(p_i)$ est la fonction coordonnée $x_i$ sur l'algèbre de Lie $\mathbf{R}^n$ de $T$.

3) On peut obtenir la formule ci-dessus sans utiliser la factorisation $q^*\xi = \oplus\, \xi_i$, mais seulement en utilisant 2) et la naturalité de la transgression. En effet, factorisons $q$ en

$$E(P)/T \xrightarrow{r} E({}_\phi P)/T' \xrightarrow{s} X$$

où $r(xT) = (x \times 1)\, T'$ pour $x \in E(P)$ et $s(yT') = yU_n$ pour $y \in E({}_\phi P)$. Comme $E({}_\phi P/T')$ est homotopiquement équivalent à l'espace des drapeaux $D(\xi)$, on a

$$s^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{{}_\phi P_{T'}} \circ v(p_i))$$

d'après 2). Par naturalité de la transgression,

$$r^* \circ s^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{P_T} \circ \phi^* \circ v(p_i)),$$

donc

$$q^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{P_T} \circ v(\phi_i)) = \prod (1 + \tau_{P_T}(\omega_i))$$

en posant $\phi_i = p_i \circ \phi$ et $\omega_i = v(\phi_i)$.

## 5. Classe de Chern d'un espace homogène presque complexe

En utilisant les notations du §1, soit $G/U$ un espace homogène, dont le fibré tangent $\xi$ est muni d'une structure complexe $J$ invariante par $G$. On va chercher les composantes irréductibles de la représentation isotrope complexe $\iota^J$ restreinte à un tore $T$ contenu dans $U$. On désignera par $g$ et $u$ les algèbres de Lie de $G$ et $U$.

On va d'abord voir que $\iota^J$ est induite par $Ad : G \to Aut_R\, \mathfrak{g}$, cette dernière étant définie par $g \mapsto d\sigma_g(1)$, où $\sigma_g$ est l'automorphisme intérieur de $G$ déterminé par $g \in G$. En effet, si $\pi : G \to G/U$ est l'application canonique, on a $d\pi(1) \circ Ad\, u = d(\pi \circ \sigma_u)(1) = \iota(u) \circ d\pi(1)$ pour $u \in U$, puisque $\pi \circ \sigma_u(g) = ugU = u \circ \pi(g)$, en interprétant $u$ comme translation à gauche de $G/U$. Donc $Ad\, u$, $u \in U$, est un automorphisme de la suite exacte $0 \to \mathfrak{u} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{d\pi} (G/U)_0 \to 0$, induisant l'automorphisme $\iota(u)$ de $(G/U)_0$. Complexifions cette suite exacte. Alors:

1) La représentation $\iota^J \otimes 1$ de $U$ dans $(G/U)_0 \otimes \mathbf{C}$ est équivalente à $\iota^{-J} \oplus \iota^{-J}$, où $\iota^J$ est la représentation conjuguée de $\iota^J$. Cela résulte du fait que

si $V$ est un espace vectoriel complexe de base $(e_k)$, $V \underset{R}{\otimes} \mathbf{C}$ admet la $\mathbf{C}$-base $\varepsilon_k = e_k \otimes 1 - ie_k \otimes i$, $\varepsilon_K' = e_k \otimes 1 + ie_k \otimes i$. Etant donné un $\mathbf{C}$-automorphisme $u$ de $V$ par $u(e_k) = \sum_j u_{jk} e_j$, on a

$$u \otimes 1(\varepsilon_k) = \sum_j u_{jk} \varepsilon_j \quad et \quad u \otimes 1(\varepsilon_k') = \sum \overline{u_{jk}} \varepsilon_j' .$$

2) Si $T$ est un tore maximal *dans* $G$, donc aussi dans $U$, alors $u \otimes \mathbf{C}$ admet un supplémentaire $V$ dans $g \otimes \mathbf{C}$ invariant par $Ad \otimes 1 \mid T$. En effet, l'algèbre de Lie $t = \mathbf{R}^n$ de $T$ devient une sous-algèbre de Cartan $t \otimes \mathbf{C}$ de $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C}$ et $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$ simultanément. Le théorème de structure $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C} = (t \otimes \mathbf{C}) \oplus \oplus V_\alpha$, où $\alpha$ décrit l'ensemble $R(G)$ des racines de $G$, et $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C} = (t \otimes \mathbf{C}) \oplus \oplus V_\beta$, où $\beta$ décrit $R(U)$, montre que l'espace vectoriel $V = \bigoplus_{\alpha \varepsilon R(G) - R(U)} V_\alpha$ est un supplémentaire de $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C}$, invariant par $ad \mid \mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$. Toute racine $\alpha$ est une forme $\mathbf{C}$-linéaire sur $\mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$ dont la restriction à $\mathfrak{t}$ est égale à $i\alpha_R$, $\alpha_R$ étant une forme $\mathbf{R}$-linéaire sur $\mathfrak{t} = \mathbf{R}^n$. Il existe une base $(e_\alpha)$ de $V$, $e_\alpha \in V_\alpha$, par rapport à laquelle la matrice de $ad\, x$, $x \in \mathbf{R}^n$, est

$$\begin{pmatrix} i\alpha_R(x) & & 0 \\ & -i\alpha_R(x) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Comme $Ad(\exp ix)$ est la matrice exponentielle de cette dernière, on voit d'une part que $V$ est invariant par $Ad(t) \otimes 1$, $A\ t = \exp ix \in T$, et d'autre part que les composantes irréductibles de $Ad \mid T$ sont données par les homomorphismes $t = \exp ix \mapsto \exp i\,\alpha_R(x)$ de $T$ dans $U_1$.

D'après ce qui précède, si $T$ est maximal dans $G$, les représentations $\iota^J \otimes \iota^J \mid T$ et $Ad \otimes 1 \mid T$ sont équivalentes. Donc les composantes irréductibles $\iota_\alpha^J$ de $\iota^J$ sont celles de $Ad \otimes 1 \mid T$ prises seulement avec l'un des signes $+$ ou $-$. Elles correspondent à un ensemble de racines positives. La donnée de ces signes détermine d'ailleurs la structure complexe $J$ de $(G/U)_0$, en vertu de $dim\, V_\alpha = 1$. En posant $\omega_\alpha^J = v(\iota_\alpha^J)$, on a la

*Proposition :* Soit $G/U$ un espace homogène presque complexe, tel que $U$ contienne un tore maximal $T$ dans $G$. Alors, si $q : G/T \to G/U$ est l'application canonique, on a $q^*(c(G/U)) = \prod (1 + \tau_{G_T}(\omega_\alpha^J))$ où $\alpha$ parcourt les racines positives de $R(G) - R(U)$ et $c(G/U)$ est la classe totale de Chern du fibré tangent $\xi$ à $G/U$, muni de la structure complexe invariante $J$.

*Preuve :* Il suffit de se rappeler que $\xi^J$ est associé au $U$-fibré principal $G_U$ par la représentation $\iota^J$ de $U$, et d'appliquer la formule trouvée au § 4.

*Convention d'écriture :* On écrit seulement $-\alpha_{\mathbf{R}}^J$ au lieu de $\tau_{G_T}(\omega_\alpha^J)$, de sorte que la formule précédente devient

$$q^*(c(G/U)) = \prod (1-\alpha_{\mathbf{R}}^J).$$

*Exemple :*

Reprenons $P\mathbf{C}^n$ (cf. §1), pour lequel on sait que $\alpha_{\mathbf{R}}^J = x_\alpha - x_1$, $\alpha > 1$, donc $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = \prod_{\alpha>1}(1+x_1-x_\alpha)$. Considérons $\mathbf{C}^{n+1}$ comme fibré vectoriel $\zeta$ sur un point $a$. En composant $q : U_{n+1}/T \to P\mathbf{C}^n$ avec l'application constante $s : P\mathbf{C}^n \to a$, on obtient l'application constante $r : U_{n+1}/T \to a$. D'après la remarque 2) du §4, $s^*(c(\zeta))$ s'écrit $\prod_{i=1}(1-x_i)$. Donc $\prod(1-x_i) = 1$ dans $A = H^*(U_{n+1}/T; \mathbf{Z})$, puisque $c(\zeta) = 1$. D'où l'identité $\prod(X-x_i) = X^n$ dans l'anneau des polynômes en $X$ à coefficients dans $A$. En substituant $1 + x_1$ à $X$, on obtient $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = (1+x_1)^n$. On a $\xi = \xi' \oplus \xi''$, avec $\xi'$ de rang 1, puisque $\xi$ est associé à un $U_1 \times U_n$ – fibré principal par $\iota^J$, et $\xi'$ n'est autre que $r^*\zeta$, c'est-à-dire par construction $\gamma$. Donc $x_1 = q^*(t)$, où $t$ engendre $H^2(P\mathbf{C}^n; \mathbf{Z})$. Comme $q^*$ est injectif en vertu du principe de clivage, on en tire $c(P\mathbf{C}^n) = (1+t)^n$.

On trouvera de profondes applications de la proposition dans [4].

## Appendice: le principe de clivage

Soit $\xi$ un fibré vectoriel complexe de rang $n$ sur un espace connexe $X$. Considérons l'espace $P(\xi)$ des droites contenues dans les fibres de $\xi$, ainsi que la projection $q : P(\xi) \to X$ induite par $\pi : E(\xi) \to X$.

Alors:

1) $q^*\xi$ contient le sous-fibré $\lambda$ de rang 1, déterminé par les couples $(d, x) \in P(\xi) \times E(\xi)$ avec $x \in d$, de sorte que $q^*\xi \approx \lambda \oplus \xi'$;

2) $q^* : H^*(X) \to H^*(P(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Pour prouver 2), considérons le produit tensoriel externe $\xi \hat{\otimes} \eta$ sur $X \times P\mathbf{C}^k$, $k \geq n$, où $\eta$ est le fibré vectoriel canonique de rang 1 sur $P\mathbf{C}^k$. Si $(\xi \hat{\otimes} \eta)_0$ est le complémentaire de la section nulle, on a une application