3. Sommes de puissances m iemes dans un anneau d'entiers algébriques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ristiques à corps résiduel fini), et soient k le corps résiduel de A, $q = p^f$ le nombre d'éléments de k et e l'indice de ramification absolu de A.

Théorème (2.2) (voir [8], th. (2.19)). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(a) $A = A_m$;
(b) $k = k_m$, et *de plus*, si p divise m, A est absolument non-ramifié.

Compte tenu du lemme (2.1), l'égalité $A = A_m$ équivaut donc à la condition « numérique » ci-dessous:

(c) $[q; m] = q$, et *de plus*, si p divise m, $e = 1$.

Ajoutons deux choses: tout d'abord, dans un anneau $\mathfrak{P}$-adique, -1 est toujours somme de puissances m^{iemes} (voir par exemple [8], th. (6.19)): l'égalité $A = A_m$ implique donc en fait que tout élément de A est somme de puissances m^{iemes}; par ailleurs, même lorsque $A \neq A_m$, A_m est un anneau local, séparé, complet, de dimension 1 (mais non intégralement clos), et A est un A_m-module de type fini (voir [8], prop. (3.14)).

*

Théorème (2.3) (voir [9], prop. 3). On a la majoration suivante, indépendante de l'anneau ($\mathfrak{P}$-adique) A:

$$w\,(m; A) \leqq 8m^5.$$

Signalons que Birch a donné, par une méthode complètement différente, la majoration (également indépendante de A) $w\,(m; A) \leqq m^{16m^2}$; par ailleurs, nous avons prouvé nous-même que si m est *premier impair*, on a la majoration plus précise $w\,(m; A) \leqq 2m-1$ (voir respectivement [3], th. 1, et [8], th. (7.34)).

3. Sommes de puissances m^{iemes} dans un anneau d'entiers algébriques

Soient maintenant A un anneau d'entiers algébriques, K le corps des fractions de A, et d le discriminant de K; pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A, convenons de désigner par c_p la caractéristique de $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$, par e_p et f_p l'indice de ramification absolu et le degré résiduel absolu de A_p, et par $N\mathfrak{p}$ le nombre d'éléments de $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$; on a donc $N\mathfrak{p} = c_p{}^f p$.

Théorème (3.1) (voir [2], th. 1, d'une part, et [6], th. 5 ou [8], th. (4.11), d'autre part). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(a) $A = A_m$;

(b) Pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A, on a $A/\mathfrak{p} = (A/\mathfrak{p})_m$, et *de plus*, si c_p divise m, on a $e_p = 1$.

Notons que, compte tenu du lemme (2.1) et du lien entre discriminant et ramification, l'égalité $A = A_m$ équivaut ici encore à une condition « numérique »:

(c) Pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A, on a l'égalité $[N\mathfrak{p}; m] = N\mathfrak{p}$, et *de plus*, m est étranger au discriminant d.

(La condition $[N\mathfrak{p}; m] = N\mathfrak{p}$ est d'ailleurs automatiquement vérifiée dès que $c_p > m$; il n'y a donc en fait qu'un nombre fini de vérifications numériques à effectuer pour voir si un couple (A, m) satisfait à la condition (c)).

Le théorème (3.1) a été démontré pour la première fois par Siegel pour $m = 2$ (voir [10], th. V) et par Bateman et Stemmler pour m premier quelconque (voir [1], th. 3). En ce qui concerne le cas général, la démonstration donnée dans [2] par Bhaskaran est de type *arithmétique* en ce sens qu'elle s'appuie sur des calculs de congruences modulo des puissances d'idéaux premiers; elle utilise d'ailleurs certains des résultats obtenus par Bateman et Stemmler dans [1] et [11]; la démonstration du théorème (3.1) que nous donnons nous-même dans [6] est au contraire de type *algébrique*: elle consiste à noter que $A = A_m$ si et seulement si $A_p = (A_p)_m$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ non nul de A, puis que $A_p = (A_p)_m$ si et seulement si $\hat{A}_p = (\hat{A}_p)_m$; comme $\hat{A}_p$ est un anneau $\mathfrak{P}$-adique, il suffit alors d'utiliser le théorème (2.2). Naturellement, les deux démonstrations sont essentiellement équivalentes; remarquons simplement que les techniques de l'Algèbre Commutative (localisation, complétion, ...) sont particulièrement bien adaptées au type de problème envisagé ici; nous aurons d'ailleurs une nouvelle occasion de le constater au paragraphe suivant.

*

Théorème (3.2) (voir [2], th. 1). Pour tout entier positif m, il existe un entier $b(m)$ tel qu'on ait la majoration

$$v(m; A) \leqq b(m)$$

pour tout anneau d'entiers algébriques A.

Ce théorème est tout à fait analogue au théorème (2.3), à ceci près qu'il ne nous donne pas d'ordre de grandeur pour la quantité majorante. Nous allons combler cette lacune en démontrant le résultat suivant:

Théoreme (3.3). Quels que soient l'entier positif m et l'anneau d'entiers algébriques A, on a l'inégalité

$$v(m; A) \leqq 2^m + 8m^5.$$

Le théorème (3.3) généralise l'inégalité

$$v(m; A) \leqq 2^{m-1} + (m-1)/3 + 1$$

obtenue par Stemmler (voir [11]) dans le cas où l'exposant m est *premier*; l'ordre de grandeur est seulement un peu moins bon: 2^m au lieu de 2^{m-1} (ceci tient au fait qu'on est obligé, dans le cas général, d'envisager les valeurs *paires* de m).

4. Démonstration du théorème (3.3).

Lemme (4.1). Soient A un anneau, m un entier positif. et B un anneau quotient de A. On a alors l'inégalité

$$v(m; B) \leqslant v(m; A).$$

Lemme (4.2.) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_r$ des anneaux en nombre fini, et soit B leur produit. On a alors l'inégalité

$$w(m; B) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant r} w(m; A_i).$$

La démonstration de ces deux lemmes est immédiate; signalons seulement que le lemme (4.2) devient faux si on y remplace w par v (comme on le voit sur l'exemple suivant: $r = 2$, $m = 2$, et $A_1 = A_2 = \mathbf{R}$).

Lemme (4.3.) Soient A un anneau, m et s deux entiers positifs et $\mathfrak{a}$ un idéal de A ayant la propriété suivante:

tout élément de $\mathfrak{a}$ est de la forme

$$\pm a_1^m \pm a_2^m \pm \ldots \pm a_s^m \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_s \in A); \tag{4}$$

on a alors l'inégalité

$$v(m; A) \leqq s + v(m; A/\mathfrak{a}).$$