I. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA « MÉTHODE DE L'HYPERBOLE » DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Bahman SAFFARI

I. INTRODUCTION

1. La « méthode de l'hyperbole » que nous exposons ci-après sur quelques exemples est une méthode élémentaire donnant de bons résultats dans les théorèmes asymptotiques. Certaines questions de théorie des nombres se ramènent au problème suivant: donner une évaluation asymptotique, lorsque $x \to +\infty$, de $F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n)$, où f est le « produit de convolution » de deux fonctions arithmétiques [1]) g et h, définie par:

$$f(n) = (g * h)(n) = \sum_{k \mid n} g(k)\, h\left(\frac{n}{k}\right).$$

Connaissant $G(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} g(k)$ et $H(x) = \sum_{1 \leq l \leq x} h(l)$, on peut évaluer $F(x)$ grâce à:

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} g(k)\, H\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{1 \leq l \leq x} h(l)\, G\left(\frac{x}{l}\right).$$

Les résultats que l'on obtient par application de (1) sont au plus aussi bons que ceux obtenus par le procédé suivant (méthode de l'hyperbole):
Pour tout ξ tel que $1 \leqq \xi \leqq x$, on a:

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{1 \leq k \leq \xi} g(k)\, H\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{1 \leq l \leq \frac{x}{\xi}} h(l)\, G\left(\frac{x}{l}\right) - G(\xi)\, H\left(\frac{x}{\xi}\right).$$

Chacun des trois termes du second membre de (2) fournit un terme-erreur, le terme-erreur global résultant alors de l'addition de ces trois termes-erreurs. On choisit ξ de manière que le terme-erreur global devienne le meilleur possible. Le nom de la « méthode de l'hyperbole » vient de ce que $F(x)$ est la somme des $g(k)\, h(l)$ où (k, l) décrit les points à coordonnées

1) Par « fonction arithmétique » nous entendons ici une fonction à valeurs réelles ou complexes, et définie sur les entiers $\geqq 1$.

entières > 0 en dessous de l'hyperbole d'équation $uv = x$, et que la formule (2) constitue, pour le calcul de cette somme, un procédé dont la signification géométrique est évidente.

2. Le premier exemple historique (Dirichlet [1]) est celui du cas $g(n) = h(n) = 1$. Alors $f(n) = d(n) =$ nombre des diviseurs de n. Il est alors bien connu [2]) que la formule (1) donne:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + O(x),$$

tandis que la méthode de l'hyperbole donne, avec $\xi = \sqrt{x}$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3}$$

γ désignant la constante d'Euler.
Cependant on démontre, par des méthodes analytiques, qu'en fait le terme-erreur de (3) est $O(x^c)$, pour une constante convenable $c < \frac{1}{3}$ (cf. par exemple [2] et [3]).

3. Nous démontrons ci-dessous, par la méthode de l'hyperbole, certains résultats nouveaux, que l'on ne peut guère rendre plus précis par des méthodes analytiques (cependant voir ci-dessous IV).

II. Sur un théoreme de Hardy et Ramanujan

1. Soit $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif n. Hardy et Ramanujan [4] ont prouvé que, lorsque $x \to +\infty$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega(n) = x \log\log x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où B est une constante $\left[B = \gamma + \sum_p \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)\right.$, la sommation étant étendue à tous les p premiers [3])$\left.\right]$. De plus, Hardy et Ramanujan ([4], p. 347) annoncent que ce théorème asymptotique peut être amélioré « par des méthodes transcendantes ». Cependant, à notre connaissance, aucune telle amélioration n'a été publiée à ce jour.

Nous démontrons ici:

---

2) Voir par exemple [12] ou [13].
3) Dans tout cet article, les lettres p, p', p'', ... désigneront exclusivement des nombres premiers; la lettre q désignera exclusivement les entiers « quadratfrei ».