SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Autor(en): **Delange, Hubert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43206

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Hubert DELANGE

A la mémoire de J. Karamata

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étendre aux fonctions de plusieurs entiers strictement positifs quelques notions usuelles relatives aux fonctions d'un entier strictement positif — communément appelées « fonctions arithmétiques » — et d'en étudier les propriétés élémentaires.

Nous désignerons par $\mathscr{A}_q$ l'ensemble des fonctions réelles ou complexes de q entiers strictement positifs.

Pour la simplicité de l'exposé, nous nous bornerons au cas où $q \leqslant 2$, mais il n'y a aucune différence essentielle entre le cas où $q = 2$ et le cas où $q > 2$.

Dans toute la suite, a et b étant deux entiers strictement positifs, le symbole (a, b), considéré isolément, désigne, comme il est d'usage, le plus grand commun diviseur de a et b.

$a|b$ signifie « a divise b ». $a \nmid b$ signifie « a ne divise pas b ».

La lettre p désigne toujours un nombre premier.

2. $\mathscr{A}_2$ COMME ALGÈBRE SUR $\mathbf{C}$

Il est classique de munir $\mathscr{A}_1$ d'une structure d'algèbre sur $\mathbf{C}$ de la façon suivante:

L'addition de deux éléments de $\mathscr{A}_1$ et la multiplication d'un élément de $\mathscr{A}_1$ par un nombre complexe sont définis comme il est habituel pour les fonctions complexes définies sur un ensemble donné — ce qui fait de l'ensemble de ces fonctions un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On prend comme multiplication de deux éléments de $\mathscr{A}_1$ la convolution définie par

$$(f_* g)(n) = \sum_{d/n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right).$$

On peut faire la même chose pour $\mathscr{A}_2$.

On définit encore l'addition de deux éléments de $\mathscr{A}_2$ et la multiplication d'un élément de $\mathscr{A}_2$ par un nombre complexe à la manière habituelle.

On prend comme multiplication de deux éléments de $\mathscr{A}_2$ la convolution définie comme suit:

$f * g$ est la fonction h définie par

$$h(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right).$$

On vérifie immédiatement que la convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition, et que, quels que soient f et $g \in \mathscr{A}_2$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, on a

$$(\alpha f) * g = f * (\alpha g) = \alpha (f * g).$$

On a donc ainsi fait de $\mathscr{A}_2$ une algèbre sur $\mathbf{C}$.

2.1. On voit immédiatement que, comme $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ possède une unité. C'est la fonction e_2 définie par

$$e_2(m, n) = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n = 1, \\ 0 \text{ dans le cas contraire } ^{1)}. \end{cases}$$

On voit aussi que les éléments inversibles de $\mathscr{A}_2$ sont les fonctions f pour lesquelles

$$f(1, 1) \neq 0. \tag{1}$$

En effet, d'après la définition de la convolution, pour que $f * g = e_2$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = e_2(m, n) \tag{2}$$

quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Pour $m = n = 1$, ceci se réduit à

$$f(1, 1)\, g(1, 1) = 1,$$

et on voit ainsi que la condition (1) est nécessaire pour que f soit inversible.

---

1) Nous désignerons par e_1 l'unité de $\mathscr{A}_1$. On a

$$e_1(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 1, \\ 0 \text{ pour } n > 1. \end{cases}$$

Si maintenant on a (1), on voit qu'il est possible de déterminer g de façon que l'on ait (2) quels que soient m et $n \geqslant 1$.

On détermine $g(m, n)$ pour m et n quelconques $\geqslant 1$ en utilisant une récurrence sur n et, pour chaque n, une récurrence sur m.

On détermine d'abord $g(m, 1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1, 1) = \frac{1}{f(1, 1)} \tag{3}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m, 1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d/m \\ d>1}} f(d, 1) g\left(\frac{m}{d}, 1\right). \tag{4}$$

Ensuite, $g(m, n)$ étant déjà déterminé pour $n \leqslant q$ et m quelconque $\geqslant 1$, on détermine $g(m, q+1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d/q+1 \\ d>1}} f(1, d) g\left(1, \frac{q+1}{d}\right) \tag{5}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/q+1 \\ d_1+d_2>2}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{q+1}{d_2}\right). \tag{6}$$

Il résulte de (3) et (4) que (2) a lieu pour $n = 1$ et m quelconque $\geqslant 1$. Pour chaque $q \geqslant 1$, il résulte de (5) et (6) que (2) a lieu pour $n = q+1$ et m quelconque $\geqslant 1$.

Naturellement, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{A}_2$ est un groupe avec la convolution comme loi. Nous désignerons ce groupe par G_2 et nous désignerons de même par G_1 le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{A}_1$ (qui sont les fonctions arithmétiques telles que $f(1) \neq 0$).

Dans $\mathscr{A}_2$ comme dans $\mathscr{A}_1$ nous désignerons par f^{-*} l'élément inverse de f, s'il existe.

3. G_2 PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

h_1 et h_2 étant deux fonctions de $\mathscr{A}_1$, nous désignerons par $h_1 \otimes h_2$ la fonction h de $\mathscr{A}_2$ définie par

$$h(m, n) = h_1(m) h_2(n).$$

A et B étant deux parties de $\mathscr{A}_1$, $A \otimes B$ sera l'ensemble des éléments $h_1 \otimes h_2$ de $\mathscr{A}_2$, où $h_1 \in A$ et $h_2 \in B$.

Il est évident que $G_1 \otimes G_1 \subset G_2$ et que $e_1 \otimes e_1 = e_2$.

D'autre part, on voit immédiatement que, si $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathscr{A}_1$, on a

$$(f_1 \otimes f_2)_* (g_1 \otimes g_2) = (f_{1*} g_1) \otimes (f_{2*} g_2) , \tag{7}$$

et il en résulte que, si f et $g \in G_1$,

$$(f \otimes g)^{-*} = f^{-*} \otimes g^{-*} . \tag{8}$$

On voit ainsi que $G_1 \otimes G_1$ est un sous-groupe de G_2.

On peut aussi le voir en remarquant que c'est l'image de G_2 par un certain endomorphisme.

En effet, considérons l'application E de G_2 dans $\mathscr{A}_2$ qui à la fonction f de G_2 fait correspondre la fonction h définie par

$$h(m, n) = \frac{f(m, 1) f(1, n)}{f(1, 1)} .$$

On voit que E est un endomorphisme de G_2:

D'abord, il est évident que, quel que soit $f \in G_2$, $E(f) \in G_2$.

D'autre part, quels que soient f et $g \in G_2$,

$$E(f_* g) = E(f)_* E(g) .$$

L'image de G_2 par E est $G_1 \otimes G_1$ car, d'une part, il est clair que, quel que soit $f \in G_2$, $E(f) \in G_1 \otimes G_1$, d'autre part, on voit immédiatement que, si $f \in G_1 \otimes G_1$, $E(f) = f$.

Il est à noter que ces propriétés entraînent que $E^2 = E$.

Alors, d'après un résultat classique, G_2 est le produit direct du noyau $E^{-1}(e_2)$ de E et de $E(G_2) = G_1 \otimes G_1$:

Toute $f \in G_2$ peut se mettre de façon unique sous la forme

$$f = g_* h , \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1 . \tag{9}$$

Plus précisément, on a

$$h = E(f) \quad \text{et} \quad g = f_* h^{-*} .$$

En effet, si g et h sont ainsi déterminés, on a bien $f = g_* h$, h appartient à $G_1 \otimes G_1$, et on a

$$E(f) = E(g)_* E(h) = E(g)_* E^2(f) = E(g)_* E(f) ,$$

de sorte que $E(g) = e_2$.

D'autre part, si on a (9), on a nécessairement

$$h = E(f) \quad \text{car} \quad E(h) = h$$

et
$$E(f) = E(g) * E(h) = e_2 * E(h) = E(h).$$

On voit de suite que $E^{-1}(e_2)$ est l'ensemble des $g \in G_2$ telles que

$$g(1, 1) = 1,$$
$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1$$

et
$$g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

On a ainsi le résultat suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(1, 1) = 1,$$
$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1,$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$f(m, n) = \frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right). \tag{10}$$

On peut supprimer dans cet énoncé la condition $g(1, 1) = 1$, car elle est une conséquence de (10) pour $m = n = 1$. On peut aussi supprimer dans (10) le facteur $\dfrac{1}{f(1, 1)}$, en multipliant la fonction g par ce facteur. On obtient ainsi l'énoncé suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(m, 1) = 0 \text{ pour } m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \text{ pour } n > 1 \tag{11}$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$f(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right). \tag{12}$$

4. Fonctions multiplicatives et fonctions additives

La fonction f de $\mathscr{A}_2$ sera dite multiplicative si l'on a

$$f(1, 1) = 1$$

et $f(m'm'', n'n'') = f(m', n')f(m'', n'')$ lorsque $(m'n', m''n'') = 1$ [1]).

Elle sera dite additive si l'on a

$f(m'm'', n'n'') = f(m', n') + f(m'', n'')$ lorsque $(m'n', m''n'') = 1$ (ce qui entraîne $f(1, 1) = 0$, comme on le voit en prenant $m' = m'' = n' = n'' = 1$).

Le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de m et n sont des fonctions multiplicatives de m et n. Il en est de même de la fonction égale à 1 quand $(m, n) = 1$ et à zéro quand $(m, n) > 1$.

Le nombre des diviseurs premiers communs à m et n, la somme de ces diviseurs, sont des fonctions additives de m et n.

On voit immédiatement qu'une fonction multiplicative, ou additive, est complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour tous les couples $[p^j, p^k]$, où p est un nombre premier et j et k sont des entiers $\geqslant 0$ tels que $j+k>0$.

Plus précisément, soit ρ_p la fonction de $\mathscr{A}_1$ définie par

$$\rho_p(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \nmid n, \\ p^r & \text{si} \quad p^r/n \quad \text{et} \quad p^{r+1} \nmid n, \; r > 0. \end{cases}$$

Si f est multiplicative, on a

$$f(m, n) = \prod_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)]. \tag{13}$$

Si f est additive, on a

$$f(m, n) = \sum_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)].$$

Dans les deux cas, les valeurs de $f(p^j, p^k)$ peuvent être choisies arbitrairement pour tous les nombres premiers p et tous les couples $[j, k]$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $j+k>0$.

4.1. Nous désignerons par $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{A}_2$ qui sont multiplicatives, $\mathfrak{M}_1$ désignant l'ensemble des fonctions multiplicatives d'un entier >0.

Il est évident que $\mathfrak{M}_2 \subset G_2$. En fait, $\mathfrak{M}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme $\mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de G_1.

Tout d'abord, on voit immédiatement que, si f et $g \in \mathfrak{M}_2$, $f_* g \in \mathfrak{M}_2$.

En effet, si $(m'n', m''n'') = 1$, on a $(m', m'') = (n', n'') = 1$ et on obtient tous les diviseurs de $m'm''$, chacun une fois, en formant tous les

---

[1]) La condition $f(1, 1) = 1$ est conséquence de la deuxième condition si l'on suppose que f n'est pas identiquement nulle. Nous l'introduisons pour écarter la fonction identiquement nulle.

produits $d'_1 d''_1$ où d'_1/m' et d''_1/m'', et tous les diviseurs de $n' n''$, chacun une fois, en formant tous les produits $d'_2 d''_2$, où d'_2/n' et d''_2/n''.

On a d'ailleurs

$$(d'_1 d'_2, d''_1 d''_2) = \left(\frac{m'}{d'_1}\frac{n'}{d'_2}, \frac{m''}{d''_1}\frac{n''}{d''_2}\right) = 1.$$

On voit ainsi que, si $h = f * g$, avec f et $g \in \mathfrak{M}_2$, et si $(m' n', m'' n'') = 1$, on a

$$h(m' n', m'' n'') = \sum_{\substack{d'_1/m', d''_1/m'' \\ d'_2/n', d''_2/n''}} f(d'_1 d''_1, d'_2 d''_2)\, g\left(\frac{m' m''}{d'_1 d''_1}, \frac{n' n''}{d'_2 d''_2}\right)$$

$$= \sum_{\substack{d'_1/m', d''_1/m'' \\ d'_2/n', d''_2/n''}} f(d'_1, d'_2)\, g\left(\frac{m'}{d'_1}, \frac{n'}{d'_2}\right) f(d''_1, d''_2)\, g\left(\frac{m''}{d''_1}, \frac{n''}{d''_2}\right)$$

$$= \left\{\sum_{\substack{d'_1/m' \\ d'_2/n'}} f(d'_1, d'_2)\, g\left(\frac{m'}{d'_1}, \frac{n'}{d'_2}\right)\right\}\left\{\sum_{\substack{d''_1/m'' \\ d''_2/n''}} f(d''_1, d''_2)\, g\left(\frac{m''}{d''_1}, \frac{n''}{d''_2}\right)\right\}$$

$$= h(m', n')\, h(m'', n'').$$

Pour montrer que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $f^{-*} \in \mathfrak{M}_2$, on peut procéder de la façon suivante.

On montre que, pour chaque nombre premier p, on peut déterminer les nombres $a_p(j, k)$, où j et k sont des entiers $\geqslant 0$ et $j+k>0$, de façon que l'on ait pour j et $k \geqslant 0$ et $j+k>0$

$$f(p^j, p^k) + \sum_{\substack{0 \leq j' \leq j \\ 0 \leq k' \leq k \\ j'+k'>0}} f(p^{j-j'}, p^{k-k'})\, a_p(j', k') = 0. \tag{14}$$

Pour cela, on fait un raisonnement semblable à celui par lequel on a montré au § 2.1 que, si $f \in \mathscr{A}_2$ et $f(1, 1) \neq 0$, f est inversible.

Ceci dit, on peut déterminer une fonction g de $\mathfrak{M}_2$ par

$$g(p^j, p^k) = a_p(j, k) \quad \text{pour} \quad j \geqslant 0, k \geqslant 0, j + k > 0.$$

On sait que $f * g \in \mathfrak{M}_2$. Mais (14) montre que, si $h = f * g$, on a

$$h(p^j, p^k) = 0 \quad \text{pour} \quad j \geqslant 0, k \geqslant 0, j + k > 0,$$

et, d'après (13) appliquée à h, ceci entraîne $h = e_2$.

Donc $g = f^{-*}$.

4.1.1. Il est clair que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$ et il résulte de (7) et (8) que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $G_1 \otimes G_1$, donc de G_2.

On voit immédiatement que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Par suite $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

E étant l'endomorphisme de G_2 considéré au § 3, soit $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap E^{-1}(e_2)$.

$\mathfrak{N}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme intersection de deux sous-groupes, donc est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

$\mathfrak{M}_2$ est produit direct de $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$.

En effet, on a vu au § 3 que G_2 est produit direct de $E^{-1}(e_2)$ et $G_1 \otimes G_1$ et que, dans l'expression d'une fonction f de G_2 sous la forme

$$f = g * h, \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1,$$

on a $h = E(f)$ et $g = f_* h^{-*}$.

Mais on voit immédiatement que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $E(f) \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$. Donc, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ et par suite $h \in \mathfrak{M}_2$, $g \in \mathfrak{M}_2$ et finalement $g \in \mathfrak{N}_2$. De plus, l'expression de f sous la forme

$$f = g_* h, \quad \text{où} \quad g \in \mathfrak{N}_2 \quad \text{et} \quad h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1,$$

est unique parce que $\mathfrak{N}_2 \subset E^{-1}(e_2)$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$.

On voit de suite que $\mathfrak{N}_2$ est l'ensemble des fonctions g de $\mathfrak{M}_2$ qui satisfont à

$$g(p^j, p^k) = 0 \quad \text{quand } j \text{ ou } k = 0 \text{ mais } j+k>0,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$g(m, n) = 0 \quad \text{quand } \{p \mid p/m\} \neq \{p \mid p/n\}.$$

5. Fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs

Il est classique d'utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_1$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$, espace vectoriel que nous désignerons par X_1:

a étant une fonction de $\mathscr{A}_1$ et F une fonction de X_1, on désigne par $a \perp F$, par exemple, la fonction G de X_1 définie par

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut de même utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel X_2 des fonctions complexes de deux variables réelles $\geqslant 1$.

a étant une fonction de $\mathscr{A}_2$ et F une fonction de X_2, on désignera par $a \perp F$ la fonction G de X_2 définie par

$$G(x, y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a(m, n) F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right).$$

a étant fixée, l'application $F \to a \perp F$ est une application linéaire de X_2 dans X_2.

De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

a) Quelle que soit $F \in X_2$, $e_2 \perp F = F$;

b) Quels que soient $F \in X_2$, $a \in \mathscr{A}_2$ et $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

c) Quelles que soient $F \in X_2$, a et $b \in \mathscr{A}_2$,

$$a \perp (b \perp F) = (a_* b) \perp F .$$

6. Fonctions génératrices

6.1. A la fonction f de $\mathscr{A}_2$ nous associons la série double

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}},$$

où s et s' sont deux variables complexes.

S'il existe des valeurs de s et s' pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite « fonction génératrice » de f.

Si les séries associées aux fonctions f et g de $\mathscr{A}_2$ sont absolument convergentes pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, il en est de même de la série associée à $f_* g$ et sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Pour le voir, il suffit de considérer la série quadruple

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1} \frac{f(m_1, n_1) g(m_2, n_2)}{m_1^s m_2^s n_1^{s'} n_2^{s'}},$$

qui est absolument convergente pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, et de grouper ensemble les termes pour lesquels les produits $m_1 m_2$ et les produits $n_1 n_2$ ont les mêmes valeurs.

Ainsi, comme dans le cas d'une variable, la convolution correspond à la multiplication des fonctions génératrices.

6.2. f étant une fonction de $\mathfrak{M}_2$, et σ et σ' étant deux nombres réels, si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} \frac{|f(p^j, p^k)|}{p^{j\sigma+k\sigma'}} < +\infty ,$$

la série

$$\sum_{m,n \geqq 1} \frac{f(m,n)}{m^s n^{s'}}$$

est absolument convergente pour $\mathcal{R}s \geqslant \sigma$ et $\mathcal{R}s' \geqslant \sigma'$ et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \left[\sum_{j,k \geqq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{js+ks'}} \right].$$

Pour établir ce résultat, il suffit de prouver que, si $g \in \mathfrak{M}_2$ et si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} |g(p^j, p^k)| < +\infty ,$$

la série $\sum_{m,n \geqq 1} g(m, n)$ est absolument convergente et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \left[\sum_{j\,k \geqq 0} g(p^j, p^k) \right]. \tag{15}$$

Le résultat voulu s'en déduira en prenant $g(m, n) = \dfrac{f(m,n)}{m^s\, n^{s'}}$.

Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant.

Le produit infini (15) s'écrit

$$\prod_{r=1}^{-\infty} \left[\sum_{j,k \geqq 0} g(p_r^j, p_r^k) \right].$$

Il est absolument convergent car, pour chaque r,

$$\left| \sum_{j,k \geqq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \right| = \left| \sum_{\substack{j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} g(p_r^j, p_r^k) \right| \leqslant \sum_{\substack{j,k \geqq 0 \\ j+k>0}} |g(p_r^j, p_r^k)| ,$$

de sorte que

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \left| \sum_{j,k \geqq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \right| < +\infty .$$

On voit en même temps que le produit infini

$$\prod_{r=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k \geqq 0} | g(p_r^j, p_r^k) | \right]$$

est convergent. Soit P sa valeur.

Soient maintenant g_r et h_r les fonctions de $\mathfrak{M}_2$ déterminées par

$$g_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si} \quad p \leqslant p_r , \\ 0 & \text{si} \quad p > p_r , \end{cases}$$

et

$$h_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si} \quad p = p_r , \\ 0 & \text{si} \quad p \neq p_r . \end{cases}$$

(j et $k \geqslant 0$, $j + k > 0$).

Il résulte de la formule (13) que, pour chaque couple $[m, n]$, $g_r(m, n)$ tend vers $g(m, n)$ quand r tend vers $+\infty$.

De plus, on voit que, pour chaque $r \geqslant 1$,

$$g_{r+1} = g_r * h_{r+1} \qquad \text{et} \qquad |g_{r+1}| = |g_r| * |h_{r+1}| ,$$

et on en déduit, par récurrence sur r, que, pour chaque $r \geqslant 1$, la série $\sum_{m,n \geqq 1} g_r(m, n)$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{m,n \geqq 1} | g_r(m, n) | = \prod_{q=1}^{r} \left[\sum_{j,k \geqq 0} | g(p_q^j, p_q^k) | \right] \tag{16}$$

et

$$\sum_{m,n \geqq 1} g_r(m, n) = \prod_{q=1}^{r} \left[\sum_{j\,k \geqq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right]. \tag{17}$$

Il résulte de (16) que, quel que soit $x \geqslant 1$, on a pour tout $r \geqslant 1$

$$\sum_{m,n \leqq x} | g_r(m, n) | \leqslant P .$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\sum_{m,n \leqq x} | g(m, n) | \leqslant P$$

et il en résulte que la série $\sum_{m,n\geq 1} |g(m,n)|$ est convergente.

Maintenant, d'après la formule (13), pour chaque couple $[m, n]$, on a

$$|g_r(m,n)| \leqslant |g(m,n)| \quad \text{quel que soit } r \geqslant 1.$$

Alors (17) donne, par passage à la limite pour r tendant vers $+\infty$,

$$\sum_{m,n\geq 1} g(m,n) = \prod_{q=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k\geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right].$$

(Reçu le 27 avril 1968)

H. Delange
Faculté des Sciences de l'Université de Paris à Orsay
91 - Orsay