3. G_2 PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Si maintenant on a (1), on voit qu'il est possible de déterminer g de façon que l'on ait (2) quels que soient m et $n \geqslant 1$.

On détermine $g(m, n)$ pour m et n quelconques $\geqslant 1$ en utilisant une récurrence sur n et, pour chaque n, une récurrence sur m.

On détermine d'abord $g(m, 1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1, 1) = \frac{1}{f(1, 1)} \tag{3}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m, 1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d/m \\ d>1}} f(d, 1) g\left(\frac{m}{d}, 1\right). \tag{4}$$

Ensuite, $g(m, n)$ étant déjà déterminé pour $n \leqslant q$ et m quelconque $\geqslant 1$, on détermine $g(m, q+1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d/q+1 \\ d>1}} f(1, d) g\left(1, \frac{q+1}{d}\right) \tag{5}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/q+1 \\ d_1+d_2>2}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{q+1}{d_2}\right). \tag{6}$$

Il résulte de (3) et (4) que (2) a lieu pour $n = 1$ et m quelconque $\geqslant 1$. Pour chaque $q \geqslant 1$, il résulte de (5) et (6) que (2) a lieu pour $n = q+1$ et m quelconque $\geqslant 1$.

Naturellement, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{A}_2$ est un groupe avec la convolution comme loi. Nous désignerons ce groupe par G_2 et nous désignerons de même par G_1 le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{A}_1$ (qui sont les fonctions arithmétiques telles que $f(1) \neq 0$).

Dans $\mathscr{A}_2$ comme dans $\mathscr{A}_1$ nous désignerons par f^{-*} l'élément inverse de f, s'il existe.

3. G_2 PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

h_1 et h_2 étant deux fonctions de $\mathscr{A}_1$, nous désignerons par $h_1 \otimes h_2$ la fonction h de $\mathscr{A}_2$ définie par

$$h(m, n) = h_1(m) h_2(n).$$

A et B étant deux parties de $\mathscr{A}_1$, $A \otimes B$ sera l'ensemble des éléments $h_1 \otimes h_2$ de $\mathscr{A}_2$, où $h_1 \in A$ et $h_2 \in B$.

Il est évident que $G_1 \otimes G_1 \subset G_2$ et que $e_1 \otimes e_1 = e_2$.

D'autre part, on voit immédiatement que, si $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathscr{A}_1$, on a

$$(f_1 \otimes f_2)_* (g_1 \otimes g_2) = (f_{1*} g_1) \otimes (f_{2*} g_2) , \tag{7}$$

et il en résulte que, si f et $g \in G_1$,

$$(f \otimes g)^{-*} = f^{-*} \otimes g^{-*} . \tag{8}$$

On voit ainsi que $G_1 \otimes G_1$ est un sous-groupe de G_2.

On peut aussi le voir en remarquant que c'est l'image de G_2 par un certain endomorphisme.

En effet, considérons l'application E de G_2 dans $\mathscr{A}_2$ qui à la fonction f de G_2 fait correspondre la fonction h définie par

$$h(m, n) = \frac{f(m, 1) f(1, n)}{f(1, 1)} .$$

On voit que E est un endomorphisme de G_2:

D'abord, il est évident que, quel que soit $f \in G_2$, $E(f) \in G_2$.

D'autre part, quels que soient f et $g \in G_2$,

$$E(f_* g) = E(f)_* E(g) .$$

L'image de G_2 par E est $G_1 \otimes G_1$ car, d'une part, il est clair que, quel que soit $f \in G_2$, $E(f) \in G_1 \otimes G_1$, d'autre part, on voit immédiatement que, si $f \in G_1 \otimes G_1$, $E(f) = f$.

Il est à noter que ces propriétés entraînent que $E^2 = E$.

Alors, d'après un résultat classique, G_2 est le produit direct du noyau $E^{-1}(e_2)$ de E et de $E(G_2) = G_1 \otimes G_1$:

Toute $f \in G_2$ peut se mettre de façon unique sous la forme

$$f = g_* h , \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1 . \tag{9}$$

Plus précisément, on a

$$h = E(f) \quad \text{et} \quad g = f_* h^{-*} .$$

En effet, si g et h sont ainsi déterminés, on a bien $f = g_* h$, h appartient à $G_1 \otimes G_1$, et on a

$$E(f) = E(g)_* E(h) = E(g)_* E^2(f) = E(g)_* E(f) ,$$

de sorte que $E(g) = e_2$.

D'autre part, si on a (9), on a nécessairement

$$h = E(f) \quad \text{car} \quad E(h) = h$$

et
$$E(f) = E(g) * E(h) = e_2 * E(h) = E(h).$$

On voit de suite que $E^{-1}(e_2)$ est l'ensemble des $g \in G_2$ telles que

$$g(1, 1) = 1,$$
$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1$$

et
$$g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

On a ainsi le résultat suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(1, 1) = 1,$$
$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1,$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$f(m, n) = \frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right). \tag{10}$$

On peut supprimer dans cet énoncé la condition $g(1, 1) = 1$, car elle est une conséquence de (10) pour $m = n = 1$. On peut aussi supprimer dans (10) le facteur $\dfrac{1}{f(1, 1)}$, en multipliant la fonction g par ce facteur. On obtient ainsi l'énoncé suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(m, 1) = 0 \text{ pour } m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \text{ pour } n > 1 \tag{11}$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$f(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right). \tag{12}$$

4. Fonctions multiplicatives et fonctions additives

La fonction f de $\mathscr{A}_2$ sera dite multiplicative si l'on a

$$f(1, 1) = 1$$