2. Dominated variation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Dominated variation

We start from the following

Definition. *A monotone function U varies dominatedly if*

$$\limsup \frac{U(2t)}{U(t)} < \infty \qquad \text{in case} \qquad U \uparrow$$

(2.1)

$$\limsup \frac{U(t/2)}{U(t)} < \infty \qquad \text{in case} \qquad U \downarrow .$$

This leads immediately to the

Criterion. *A non-decreasing U varies dominatedly if there exist constants* C, γ, *and* t_0 *such that*

$$\frac{U(tx)}{U(t)} < Cx^{\gamma} \qquad x > 1 , \ t > t_0 . \tag{2.2}$$

For non-increasing U the same criterion applies with $x>1$ replaced by $x<1$.

Proof. The sufficiency is obvious. Assume (2.1) and choose t_0 and C such that

$$\frac{U(2t)}{U(t)} < C \qquad \text{for} \qquad t > t_0 . \tag{2.3}$$

Put $\gamma = \operatorname{Log}_2 C$. For $x>1$ define n by $2^{n-1}<x\leqslant 2^n$. A repeated application of (2.3) then shows that the left side in (2.2) is $\leqslant C^n \leqslant Cx^{\gamma}$.

Dominated variation of U may be described by saying that *the measures associated with $U(t\cdot)/U(t)$ form a sequentially compact family* in the sense that every sequence contains a subsequence converging on finite intervals to a finite measure. As in the case of slowly varying functions, the occurrence of limit measures that vanish identically on $(0, \infty)$ introduces some lack of symmetry. The supplementary condition (4.1) is designed to avoid this anomaly.