Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1969)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CARACTÉRISATION DE CERTAINES TOPOLOGIES COMPACTES
Autor: Lorch, E. R. / Tong, Hing
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43212

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CARACTÉRISATION DE CERTAINES TOPOLOGIES COMPACTES

E. R. LORCH et HING TONG [1]

A la mémoire de J. Karamata

On suivra de près les notations et la terminologie données par l'un de nous dans [1]. Soit **E** un ensemble dont les points seront indiqués par $x, y, \ldots$. Soit τ une topologie compacte sur **E**. Il sera entendu que la topologie est séparée. On désigne par C_τ l'algèbre de toutes les fonctions continues sur **E** et à valeurs réelles. Pour spécifier la topologie, nous parlerons souvent de fonctions τ-continues, d'ensembles τ-ouverts, etc. On désigne par I_τ l'algèbre des fonctions réelles de Baire engendrées par C_τ. Soit maintenant T l'ensemble de toutes les topologies compactes τ' (sur **E** bien entendu) et telles que $I_{\tau'} = I_\tau$. Autrement dit, $T = \{\tau' : I_{\tau'} = I_\tau\}$. Etant donnée une topologie τ de T, toute autre topologie τ' de T sera appelée cohérente; plus exactement, la paire (τ, τ') sera une paire cohérente.

On introduit dans T une topologie, appelée *métatopologie*, de la manière suivante (pour les détails nous renvoyons le lecteur à [1]): soit $\tau \in T$ et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions appartenant à C_τ. Alors, l'ensemble

$$U(\tau; f_1, \ldots, f_n) = \{\tau' : \tau' \in T \text{ et } f_1, \ldots, f_n \in C_{\tau'}\}$$

définit un voisinage « typique » de τ dans la métatopologie. En effet, on obtient, en variant l'entier n et les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de toutes les manières possibles, une base de voisinages ouverts de τ dans la métatopologie.

La métatopologie n'est pas discrète en général. Donc, sauf pour des cas très particuliers (par exemple, si **E** est un ensemble fini), il n'est pas vrai que l'ensemble $\{\tau\}$ de T est ouvert pour chaque τ. Tout de même c'est un fait qui découle très facilement de théorèmes classiques que la métatopologie est discrète au point τ, donc que l'ensemble $\{\tau\}$ est ouvert, dans le cas suivant: supposons qu'il existe n fonctions τ-continues, $f_1, \ldots, f_n$, qui séparent les points de **E** (c'est-à-dire que $f_i(x) = f_i(y)$, $i = 1,, \ldots, n$, est impossible à moins que $x = y$). Soit τ' une topologie dans $U(\tau; f_1, \ldots, f_n)$. Alors

[1] Travail subventionné par la National Science Foundation, U.S.A.

puisque $f_1, ..., f_n \in C_{\tau'}$, la topologie faible engendrée par les f_i est moins fine que τ'. D'autre part cette topologie est identique à τ puisqu'elle est séparée. Donc $\tau \subset \tau'$, ce qui implique que $\tau = \tau'$. Nous avons $U(\tau; f_1, ..., f_n) = \{\tau\}$ et donc $\{\tau\}$ est ouvert.

Dans cette note nous allons démontrer une proposition réciproque à celle ci-dessus. Nous démontrons que si la métatopologie sur T est discrète au point τ, alors il existe n fonctions $f_1, ..., f_n$ dans C_τ qui séparent les points de **E**. Autrement dit, nous montrons que si τ est une topologie compacte sur **E** pour laquelle il existe des fonctions τ-continues $g_1, ..., g_m$ telles que l'unique topologie pour laquelle les g_i sont continues est τ, alors il existe des fonctions τ-continues $f_1, ..., f_n$ qui séparent les points de **E**. Nous verrons en effet qu'avec une simple adjonction, les fonctions $g_1, ..., g_m$ séparent les points de **E**.

Nous énonçons ci-dessous trois propositions équivalentes. La plupart des implications sont connues. C'est seulement 3)⇒1) qui demandera notre attention.

THÉORÈME: *Soit τ une topologie compacte sur* **E** *et soit* T *l'ensemble de toutes les topologies compactes sur* **E** *ayant les mêmes fonctions de Baire réelles que τ. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe* n *fonctions réelles τ-continues* $f_1, ..., f_n$ *qui séparent les points de* **E** *(c'est-à-dire, telles que* $f_i(x) = f_i(y)$, $i = 1, ..., n$ *implique* $x = y$).
2) *L'espace topologique* (**E**, τ) *est homéomorphe à un sous-espace compact de* $\mathbf{R}^n$.
3) *La métatopologie sur* T *est discrète au point τ.*

Démonstration: 1)⇒2). Supposons que $f_1, ... f_n$ séparent les points de **E**. Soit Φ: $\mathbf{E} \to \mathbf{R}^n$ l'application définie par $\Phi(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. Il est facile de voir que Φ est continue et bijective et que l'image de **E** par Φ, c'est-à-dire $\Phi(\mathbf{E})$, est un ensemble compact de $\mathbf{R}^n$. Donc Φ est un homéomorphisme.

2)⇒3). Soit Ψ une application homéomorphe de **E** dans $\mathbf{R}^n$, Ψ: $\mathbf{E} \to \mathbf{R}^n$. Si $(\xi_1, ..., \xi_n)$ est un point de $\mathbf{R}^n$, soit p_i la projection p_i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par $p_i(\xi_1, ..., \xi_n) = \xi_i$. Soit $f_i = p_i \circ \Psi$, $i = 1, ..., n$. Alors les fonctions $f_1, ..., f_n$ sont τ-continues et séparent les points de **E**. Donc on a démontré 2)⇒1). La démonstration que 1)⇒3) a été donnée dans un des paragraphes précédant l'énoncé du théorème.

Il reste à démontrer que 3)⇒1). Soit donc la métatopologie sur T discrète au point τ. Ceci veut dire que chaque base au point τ de la métatopo-

logie contient l'ensemble $\{\tau\}$. Il existe donc des fonctions $f_1, ..., f_n$ qui sont τ-continues et telles que $U(\tau; f_1, ..., f_n) = \{\tau\}$. Supposons que les fonctions $f_1, ..., f_n$ ne séparent pas les points de $\mathbf{E}$. Il existe donc deux points $x_1, y_1 \in \mathbf{E}$, $x_1 \neq y_1$, tels que $f_i(x_1) = f_i(y_1)$, $i = 1, ..., n$. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble de tous les points $z \in \mathbf{E}$ tels que $f_i(x_1) = f_i(z)$, $i = 1, ..., n$. Nous avons $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\Phi(x_1))$ où Φ est l'application donnée par $\Phi(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. Puisque Φ est une application continue, $\mathbf{A}$ est un ensemble τ-fermé. Démontrons premièrement la

PROPOSITION: *L'ensemble* $\mathbf{A}$ *est un ensemble fini et la topologie* τ *est discrète en chaque point* $z \in \mathbf{A}$.

Supposons que $\mathbf{A}$ soit infini. Puisque $\mathbf{A}$ est compact, il existe un point x^* qui est un point d'accumulation de $\mathbf{A}$. Soit x_0 un autre point de $\mathbf{A}$. Il existe une fonction g: $\mathbf{E} \to \mathbf{R}$, τ-continue, telle que $g(x^*) = 0$, $g(x_0) = 1$. Un ensemble constitué des zéros d'une fonction continue sera appelé un *zéro-ensemble* (zeroset). Il est à noter qu'un zéroensemble est un ensemble de Baire; un ensemble fermé ne l'est pas en général. Il existe donc deux τ-zéro-ensembles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_0$, pour lesquels $x^* \in \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}$, $x_0 \in \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_0 \cap \mathbf{A}^* = \varnothing$; de plus le point x^* est un point d'accumulation de $\mathbf{A}^*$. On notera que $\mathbf{A}$ est un τ-zéroensemble et que l'intersection finie de zéroensembles est un zéroensemble.

Nous construisons maintenant une succession de τ-zéroensembles: $\mathbf{A}_1^* \supsetneqq \mathbf{A}_2^* \supsetneqq ...$ tels que $x^* \in \mathbf{A}_l \subsetneqq \mathbf{A}^*$ et nous choisissons $x_l^* \in \mathbf{A}_l^* - \mathbf{A}_{l+1}^*$, $l = 1, 2, ...$ Soit $\mathbf{B} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathbf{A}_l^*$. Il est clair que $\mathbf{B}$ est un τ-zéroensemble, donc un ensemble fermé de type G_δ. De plus, $\mathbf{B}$ contient chaque point d'accumulation de l'ensemble $\{x_1^*, x_2^*, ...\}$. Nous avons aussi $x_0 \in \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_0 = \varnothing$.

Considérons l'ensemble $\mathbf{F} = \mathbf{E} - (\mathbf{A}_0 \cup \mathbf{B})$ comme sous-espace de $(\mathbf{E}, \tau)$. $\mathbf{F}$ est localement compact et peut être compactifié selon la manière classique par l'adjonction d'un point x_∞. De plus, puisque $\mathbf{B}$ n'est pas un ensemble ouvert, $\mathbf{F}$ n'est certainement pas compact et donc dans la compactification $\mathbf{F} \cup \{x_\infty\}$ le point x_∞ est un point d'accumulation. Nous construisons maintenant une nouvelle topologie τ' sur $\mathbf{E}$ de la manière suivante. Considérons $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{B}$ comme sous-espaces de $(\mathbf{E}, \tau)$. Formons l'union libre des trois espaces $\mathbf{F} \cup \{x_\infty\}$, $\mathbf{A}_0$, et $\mathbf{B}$. Dans cette union libre, identifions les points x_0 et x_∞. Ceci sera l'espace $(\mathbf{E}, \tau')$.

La topologie τ' est compacte. De plus, la topologie τ' est cohérente. Pour s'en assurer, il suffit de montrer que chaque fonction g qui est τ-continue

est ou bien τ'-continue ou de la première classe de Baire pour τ'; et réciproquement. La démonstration de ce fait s'appuie sur le théorème de Tietze qui permet l'extension continue à tout un espace d'une fonction continue sur un sous-espace fermé; elle s'appuie aussi sur le fait que $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{B}$ étant des ensembles de type G_δ dans $(\mathbf{E}, \tau)$ et aussi dans $(\mathbf{E}, \tau')$, l'ensemble $\mathbf{F}$ est de type $\mathfrak{F}_\sigma$ et donc peut être représenté comme une succession d'ensembles fermés. Nous laissons au lecteur les détails de la démonstration de la cohérence.

De plus, les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont τ'-continues. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le comportement de ces fonctions dans le voisinage de x_0. Or l'ensemble $\{x\colon |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon\}$ est un τ'-voisinage de x_0 puisque l'ensemble complémentaire est un sous-ensemble de $\mathbf{F}$ qui est τ-compact. Ceci démontre donc que f_i est τ'-continue au point x_0.

Finalement, les topologies τ et τ' ne sont pas les mêmes. Car il existe des τ-voisinages de x_0 qui ne contiennent aucun des points de l'ensemble $\{x_1^*, x_2^*, \ldots\}$. Mais dans la compactification de $\mathbf{F}$, chaque voisinage de x_∞ contient des points de cette suite. Notre hypothèse faite au début de la démonstration que l'ensemble $\mathbf{A}$ est infini est donc fausse. Ceci démontre la première moitié de la proposition.

Considérons un point x de $\mathbf{A}$. Puisque $\mathbf{A}$ est un ensemble fini, il existe un τ-voisinage de x qui exclut tout autre point de $\mathbf{A}$. En outre $\mathbf{A}$ est un ensemble de type G_δ puisqu'il est un zéroensemble. Il s'ensuit que $\{x\}$ est un ensemble de type G_δ pour la topologie τ. Maintenant supposons que $\{x\}$ ne soit pas τ-ouvert. Si $y \in \mathbf{A}$, $y \neq x$, nous construisons une nouvelle topologie τ' cohérente à τ en « échangeant » les points x et y. Ceci veut dire qu'un τ'-voisinage de x sera de la forme $(\mathbf{U}-\{y\})\cup\{x\}$ où $\mathbf{U}$ est un τ-voisinage de y; et réciproquement. Il est facile de voir que τ' est cohérente (puisque les ensembles $\{x\}$ et $\{y\}$ sont de type G_δ pour τ) et aussi que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont τ'-continues. De plus τ' n'est pas identique à τ puisque x est un point d'accumulation de τ et puisque τ est séparée. Ceci contredit notre hypothèse. Il s'ensuit que τ est discrète en tout point de $\mathbf{A}$. Ceci termine la démonstration de la proposition.

Soit Φ la transformation de $\mathbf{E}$ en $\mathbf{R}^n$ donnée auparavant. Soit $\mathbf{A}$ un ensemble de la sorte envisagée dans la proposition. C'est-à-dire, $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\Phi(x))$ pour un x donné et $\mathbf{A}$ possède au moins deux éléments. Soit $\mathbf{C}$ la réunion de tous les ensembles $\mathbf{A}$, $\mathbf{C} = \cup\, \mathbf{A}$. Alors, puisque $\mathbf{A}$ est un ensemble τ-ouvert (selon la proposition), il en est de même de $\mathbf{C}$. Donc l'ensemble $\mathbf{D} = \mathbf{E}-\mathbf{C}$ est τ-fermé. Nous verrons dans la suite que $\mathbf{D}$ est un ensemble de type G_δ, donc un τ-zéroensemble.

Notons premièrement que $\Phi^{-1}\ \Phi(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ par définition. Puis, puisque $\mathbf{D}$ est τ-fermé et que Φ est continue, $\Phi(\mathbf{D})$ est fermé dans $\Phi(\mathbf{E})$. Puisque $\Phi(\mathbf{E})$ est un espace métrique, il existe des ensembles ouverts $\mathbf{O}_i \subset \Phi(\mathbf{E})$, $i = 1, 2, \ldots$, tels que $\Phi(\mathbf{D}) = \bigcap_1^\infty \mathbf{O}_i$. Donc $\mathbf{D} = \Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{D})) = \Phi^{-1}(\bigcap_1^\infty \mathbf{O}_i) = \bigcap_1^\infty \Phi^{-1}(\mathbf{O}_i)$. Puisque $\Phi^{-1}(\mathbf{O}_i)$ est ouvert, $\mathbf{D}$ est de type G_δ.

Soit f une fonction τ-continue à valeurs réelles telle que $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{D}$, $f(z) > 0$ pour $z \in \mathbf{C}$. On construira une fonction f_0, τ-continue de la manière suivante. Soit $\mathbf{A} = \{z_1, \ldots, z_r\}$ un ensemble fini de la forme $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\Phi(x))$, $x \in \mathbf{E}$, et $r > 1$. Supposons pour faciliter les notations que $f(z_r) = \min\{f(z_1), \ldots, f(z_r)\}$. Définissons alors $f_0(z_k) = (k/r)\, f(z_r)$, $k = 1, \ldots, r$. La fonction f_0 est ainsi définie pour chaque $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{C}$. Pour x dans $\mathbf{D}$, posons $f_0(x) = 0$. La fonction f_0 est τ-continue. Ceci est évident si $x \in \mathbf{C}$ puisque τ est discrète au point x. Si $x \in \mathbf{D}$, la continuité découle du fait que $0 \leqq f_0 \leqq f$ et de la continuité de f.

Considérons finalement les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Il est évident qu'elles séparent les points de $\mathbf{E}$ puisque f_0 sépare les points de chaque $\mathbf{A}$. Ceci complète la démonstration du théorème.

Nous ajoutons quelques observations. Si la métatopologie est discrète au point τ, il s'ensuit de théorèmes classiques que si $\mathbf{E}$ n'est pas un ensemble fini ou dénombrable, $\mathbf{E}$ a la puissance du continu. Si pour une topologie compacte τ et n fonctions τ-continues $f_1, \ldots, f_n$ la seule topologie (cohérente ou non) pour laquelle les f_i sont continues est τ, alors évidemment $(\mathbf{E}, \tau)$ est homéomorphe à un ensemble compact de $\mathbf{R}^n$. Finalement, le théorème démontré ci-dessus est en rapport avec la structure du groupe $\mathfrak{G}$ des équivalences de Baire appartenant aux topologies de T dans le cas des espaces métriques. Dans [1] il a été introduit pour chaque $\tau \in T$ une topologie uniforme ${}_\tau\mathfrak{G}$ dans le groupe $\mathfrak{G}$. En s'appuyant sur la proposition 4.1 de [1] nous avons le corollaire suivant: *Pour que la topologie ${}_\tau\mathfrak{G}$ soit discrète, il faut et il suffit que la métatopologie sur T soit discrète au point τ.*

Le résultat de ce travail a été annoncé dans les *Rendiconti de l'Accademia dei Lincei*, le 31 juillet 1968.

[1] Lorch, E. R., On compact metric spaces and the group of Baire equivalences, *Studia Mathematica*, T. XXXI (1968), 243-252.

(Reçu le 1er septembre 1968)

E. R. Lorch, Columbia University.

Hing Tong, Fordham University, New York, N.Y.

vide-leer-empty