UN THÉORÈME D'EXISTENCE POUR LES APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES

Autor(en): **Jarnik, Vojtch**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43215

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UN THÉORÈME D'EXISTENCE POUR LES APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES

Vojtěch JARNÍK

A la mémoire de J. Karamata

Tous les nombres de cette Note sont réels. Nous allons dire qu'un système de nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ est un système propre, si l'égalité

$$c_0 + c_1 \lambda_1 + \ldots + c_k \lambda_k = 0 \qquad (c_0, c_1, \ldots, c_k \text{ entiers})$$

entraîne $c_0 = c_1 = \ldots = c_k = 0$. Soit

$$(1) \qquad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11}, \ldots, \theta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_{m1}, \ldots, \theta_{mn} \end{pmatrix} \qquad (m \geqq 1, n \geqq 1)$$

une matrice de mn nombres

$$(2) \qquad \{\theta_{ij}\}, \quad 1 \leqq i \leqq m, \ 1 \leqq j \leqq n .$$

Soit $\varphi(x)$ une fonction positive pour $x \geqq A$ $(A \geqq 1)$. Nous allons dire [1]) que Θ admet l'approximation $\varphi(x)$, si les inégalités

$$(3) \qquad \begin{cases} |\theta_{i1} x_1 + \ldots + \theta_{in} x_n - y_i| < \varphi(x) & (i = 1, \ldots, m), \\ x = \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) > 0 \end{cases}$$

possèdent une infinité de solutions en nombres entiers

$$(4) \qquad x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m .$$

On sait que chaque matrice (1) admet l'approximation $x^{-n/m}$; d'autre part, il existe pour chaque m, n des matrices (1) qui n'admettent pas l'approximation $cx^{-n/m}$, $c > 0$ étant une constante convenable (pour $n = 1$, voir p. ex. Perron [2]; pour n quelconque, voir p. ex. Cassels [3], pp. 15-16; pour l'existence d'une infinité non dénombrable de telles matrices dans le cas $n = 1$, voir p. ex. Davenport [4], Cassels [5]). Si $\varphi(x) > 0$, $\lambda(x) > 0$

---

1) Cette terminologie diffère de celle que j'employais dans le cas $n = 1$, par exemple dans [1].

$(x \geqq A \geqq 1)$ sont des fonctions satisfaisant à quelques conditions assez naturelles, $\lambda(x) \to 0$ pour $x \to +\infty$, si l'intégrale

$$(5) \qquad \int_A^{+\infty} x^{n-1} (\varphi(x))^m \, dx$$

est divergente et l'intégrale

$$(6) \qquad \int_A^{+\infty} x^{n-1} (\varphi(x) \lambda(x))^m \, dx$$

est convergente, alors pour presque tous les systèmes (2) on a l'énoncé suivant (« presque tous » au sens de la mesure de Lebesgue): La matrice (1) admet $\varphi(x)$, mais n'admet pas $\varphi(x) \lambda(x)$. C'est, pour $n = 1$, une conséquence immédiate d'un théorème fondamental de Chinčin [6]; pour n quelconque, voir par exemple Grošev [7]. Nous allons nous occuper en particulier du cas où l'intégrale (5) est convergente et nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème A. Soit $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $A \geqq 1$, $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, décroissante et positive pour $x \geqq A$. Supposons que les fonctions

$$(7) \qquad \varphi(x) \cdot x^{1/k} (k = 1, \ldots, m), \qquad \varphi(x) \cdot x^{1+\varepsilon}, \qquad \varphi(x) \cdot x^{(n-1)/m}$$

soient monotones et que (5) soit convergente. Soit, enfin, $\lambda(x)$ une fonction continue, positive et monotone pour $x \geqq A$, $\lambda(x) \to 0$ pour $x \to +\infty$. Alors il existe un système propre

$$(8) \qquad \{\theta_{ij}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

tel que la matrice (1) admette l'approximation $\varphi(x)$, mais n'admette pas l'approximation $\varphi(x) \lambda(x)$.

Ce théorème est connu pour $n = 1$, c'est-à-dire pour les « approximations simultanées ».

$$(9) \qquad |\theta_{i1} q - p_i| < \varphi(q), \qquad q > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

La démonstration en est assez compliquée. Dans [1], j'ai démontré un théorème métrique (Sätze 3 et 4), utilisant la mesure de Hausdorff, d'où l'on peut déduire sans difficulté un théorème d'existence (Satz 5) qui présente une certaine analogie avec le cas $n = 1$ du théorème A. Plus tard, K. Černý [8], utilisant la mesure de Lebesgue, a donné une démonstration

plus simple — mais néanmoins assez compliquée (18 pages) — d'un théorème métrique (Théorème 1 dans [8]), dont il a aisément déduit son théorème 2, qui est identique au cas $n = 1$ de notre théorème A. Le but de cette note est de montrer que le cas $n > 1$ du théorème A peut être aisément déduit du cas $n = 1$, pour lequel le théorème est déjà connu.

Remarquons que les conditions de monotonie pour les fonctions (7) ne sont pas trop gênantes, car il est naturel de n'examiner que des fonctions φ d'allure assez régulière. Remarquons encore qu'il n'est pas nécessaire que toutes les fonctions (7) soient du même type; il peut se faire, par exemple, que $\varphi(x) \cdot x$ soit croissante, $\varphi(x) \cdot x^{1/2}$ décroissante, etc.

Démonstration du théorème A pour n > 1

La convergence de (5) entraîne celle de

$$\int_A^{+\infty} (\varphi(x))^m \, dx \, .$$

On peut donc appliquer le cas $n = 1$ du théorème A: Il existe un système propre

$$\{\theta_{i1}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{10}$$

tel que les inégalités (9) possèdent une infinité de solutions en nombres entiers $q, p_1, \ldots, p_m$, mais les inégalités analogues avec $\varphi(q)\,\lambda(q)$ au lieu de $\varphi(q)$ n'en possèdent qu'un nombre fini au plus. Choisissons un tel système (10) et notons deux faits évidents:

I. Si l'on ajoute à notre système (10) un système quelconque de $m(n-1)$ nombres

$$\{\theta_{ij}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 2, 3, \ldots, n) \tag{11}$$

on obtient un système (8) tel que la matrice (1) admet l'approximation $\varphi(x)$.

II. (10) étant un système propre, alors, pour presque tous les systèmes (11), le système (8) est un système propre.

Donc, pour achever la démonstration, il suffit de démontrer le Lemme suivant:

Lemme. Soit $m \geqq 1$, $n > 1$, $A \geqq 1$; soit (10) un système de m nombres donné. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue et positive, $x^{n-1}(\varphi(x))^m$ soit décroissante pour $x \geqq A$; l'intégrale (5) soit convergente. Désignons par M l'ensemble de tous les points (11) de l'espace à $m(n-1)$ dimensions, pour lesquels le système d'inégalités

$$(12) \quad \begin{cases} |\theta_{i1} x_1 + \theta_{i2} x_2 + \ldots + \theta_{in} x_n - y_i| < \varphi(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) > 0, \\ \xi = \operatorname{Max}(|x_2|, |x_3|, \ldots, |x_n|) > 0 \end{cases}$$

possède une infinité de solutions en nombres entiers (4). Alors $\mu(M) = 0$ ($\mu(M)$ est la mesure de M).

Démonstration. Soit K le cube $0 \leqq \theta_{ij} < 1$ ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=2, 3, \ldots, n$), $N = M \cap K$. Il suffit évidemment de montrer que $\mu(N) = 0$. Les nombres (4) (entiers) étant donnés, soit

$$(13) \qquad E(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

l'ensemble de tous les points (11) de K, pour lesquels (12) est satisfaite. Evidemment

$$\mu(E(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)) \leqq \left(\frac{2}{\xi}\varphi(x)\right)^m.$$

Désignons par $F(x_1, \xi)$ la réunion de tous les ensembles (13) pour lesquels x_1 et $\xi = \operatorname{Max}(|x_2|, \ldots, |x_n|) > 0$ ont des valeurs données. Désignons par c des nombres positifs ne dépendant que de m, n et des nombres (10) donnés. Si, par exemple, $|x_p| = \xi$ ($p > 1$), on a pour chaque x_j ($2 \leqq j \leqq n, j \neq p$) $2\xi + 1$ possibilités; en outre, si $x_1, \ldots, x_n$ sont donnés et si (13) doit être non vide, on a pour chaque y_i ($i=1, \ldots, m$) $c\xi$ possibilités au plus. Donc [1])

$$\mu(F(x_1, \xi)) \leqq c\xi^{m+n-2}\left(\frac{2}{\xi}\varphi(x)\right)^m,$$

où $x = \operatorname{Max}(|x_1|, \xi)$ ($\xi \geqq 1$). On obtient enfin

$$\sum_{x_1, \xi} \mu(F(x_1, \xi)) \leqq \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{|x_1| \leqq \xi} c\xi^{n-2}(\varphi(\xi))^m +$$

$$+ \sum_{|x_1|=1}^{\infty} \sum_{0<\xi<|x_1|} c\xi^{n-2}(\varphi(|x_1|))^m \leqq$$

$$\leqq c \sum_{t=1}^{\infty} t^{n-1}(\varphi(t))^m < +\infty.$$

---

1) Pour $1 \leqq x < A$ on peut compléter la définition de $\varphi(x) > 0$ d'une manière arbitraire.

Donc l'ensemble de tous les points (11) qui sont contenus dans une infinité d'ensembles $F(x_1, \xi)$ est de mesure zéro.

Remarque. Si $\varphi(x)$ est assez petite, on peut démontrer le théorème suivant, plus précis que le théorème A:

Théorème B. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqq A \geqq 1$, $x\varphi(x)$ monotone, $x\varphi(x) \to 0$ pour $x \to +\infty$, $x^{(n-1)/m} \cdot \varphi(x)$ monotone, et l'intégrale (5) soit convergente. Alors il existe un système (8) propre tel que la matrice (1) admette l'approximation $\varphi(x)$, mais n'admette aucune approximation $k\,\varphi(x)$ $(0<k<1)$.

Pour $n = 1$, ce théorème est connu (voir [1], Satz 6) et sa démonstration est, contrairement à celle du théorème A, assez facile (pour $n=1$, on n'a pas même besoin de la convergence de (5)). La démonstration pour $n>1$ s'achève comme plus haut.

Remarquons que pour $n \geqq m$ les suppositions du théorème A entraînent les suppositions du théorème B. Donc le théorème A donne des résultats qui ne sont pas contenus dans le théorème B seulement dans le cas $n<m$. Remarquons enfin que les théorèmes A, B ne donnent aucun résultat dans le cas où les intégrales (5), (6) divergent et $\varphi(x) = o(x^{-n/m})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jarník, V., Über die simultanen diophantischen Approximationen. *Math. Zeitschr.*, 33 (1931), 505-543.

[2] Perron, O., Über diophantische Approximationen. *Math. Annalen*, 83 (1921), 77-84.

[3] Cassels, J. W., *An introduction to diophantine approximation.* Cambridge Tracts No. 45 (1957, reprinted 1965).

[4] Davenport, H., Simultaneous diophantine approximation. *Mathematika*, 1 (1954), 51-72.

[5] Cassels, J. W., Simultaneous diophantine approximation. *Proc. London Math. Soc.* (3), 5 (1955), 435-448.

[6] Khintchine, A., Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Math. Zeitschr.*, 24 (1926), 706-714.

[7] Grošev, A., Un théorème sur les systèmes de formes linéaires. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 19 (1938), 151-152.

[8] Černý, K., Contribution à la théorie des approximations simultanées. *Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Carolinae (Prague)*, 1948, n° 188. Une traduction russe est parue dans *Časopis pro pěstování matematiky*, 2 (77), 1952, 191-220.

(Reçu le 1er mai 1968)

Prof. V. Jarník
Sokolovská 83
Praha-8-Karlín

vide-leer-empty