Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1969)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TROIS NOTES SUR LES ENSEMBLES PARFAITS LINÉAIRES
Autor: Kahane, J.-P.
Kapitel: III. Une mesure singulière et presque lisse
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43217

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Soit r_n une suite positive sommable ($\sum_1^\infty r_n = b_0 < \infty$). Notons φ_n la fonction paire égale à $\frac{1}{2r_n}$ sur $[0, r_n]$, et nulle sur $[r_n, \infty]$. Soit f_n la convolution $\varphi_1 * \varphi_2 * \ldots * \varphi_n$. On vérifie que f_n converge uniformément vers une fonction f de classe C^∞ et de support $[-b_0, b_0]$ quand $n \to \infty$ [4].

Posons $b_n = r_{n+1} + r_{n+2} + \ldots$ et supposons maintenant $r_n > b_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). L'ensemble des points $\sum_1^\infty \varepsilon_n r_n$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) est un ensemble parfait symétrique que nous noterons E. A une translation près, tout ensemble parfait symétrique est de cette forme, pour un choix convenable de la suite r_n. Pour construire E, on peut procéder par étapes: on part du segment $[-b_0, b_0]$ (blanc) et on ôte en son centre un intervalle $[-r_1+b_1, r_1-b_1]$ (noir); il reste deux segments blancs $[\varepsilon_1 r_1 - b_1, \varepsilon_1 r_1 + b_1]$, et on répète l'opération, de sorte qu'à la n-ième étape l'ensemble restant, E_n, soit la réunion des 2^n segments blancs $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \ldots + \varepsilon_n r_n - b_n, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \ldots + \varepsilon_n r_n + b_n]$. E est l'intersection des E_n. L'ensemble $E_n \setminus E_{n+1}$ est l'ensemble noirci à la n-ième étape.

Observons que si f_n est un polynome de degré p sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur $> 2r_{n+1}$, il en est de même de $f_{n+1} = f_n * \varphi_{n+1}$ sur l'intervalle $[\alpha + r_{n+1}, \beta - r_{n+1}]$. Donc, si f_n est un polynome de degré p sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur $> 2b_n$, il en est de même de f sur l'intervalle $[\alpha + b_n, \beta - b_n]$. Or f_1 est constant sur l'intervalle $[-r_1, r_1]$, f_2 est linéaire sur chacun des segments $[\varepsilon_1 r_1 - r_2, \varepsilon_1 r_1 + r_2]$, f_3 est parabolique sur chacun des segments $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 - r_3, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + r_3]$ et ainsi de suite. Il s'ensuit que sur $E_n \setminus E_{n+1}$ (réunion des intervalles noircis à la n-ième étape) f est localement un polynome de degré $n-1$. Donc f est localement polynomiale en dehors de E.

III. Une mesure singulière et presque lisse

Zygmund a appelé fonctions lisses les fonctions f telles que

$$\omega_2(f, t) = \sup_x \sup_{|h| \leq t} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| = o(t) \qquad (t \to 0).$$

Il a aussi introduit la classe $\Lambda*$ des fonctions f pour lesquelles

$$\omega_2(f, t) = 0(t) \qquad (t \to 0);$$

nous dirons que ces dernières fonctions sont presque lisses. Si f est monotone et (presque) lisse, nous dirons aussi que la mesure dérivée df est (presque) lisse.

Par une voie très détournée, Duren, Shapiro et Shields ont établi l'existence de mesures singulières presque lisses [3]. Piranian en a donné des exemples explicites [5]. Enfin, récemment, H. S. Shapiro a obtenu des mesures singulières lisses, dont la primitive f satisfait à $\omega_2(f, t) = O\left(t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$ [6]. Nous développons ici un exemple qui avait été mentionné dans [5] sous le nom de Kahane's example, et nous montrons comment une variante permet d'obtenir le résultat de Shapiro.

Désignons par ω_0 le segment [0, 1], et par ω_j l'un quelconque des intervalles de la forme $[p4^{-j}, (p+1)\,4^{-j}]$ contenus dans ω_0. Nous construisons simultanément une suite de mesures $d\mu_j$ et leurs supports E_j de la manière suivante:

$d\mu_0$ est la mesure de Lebesgue sur ω_0;

$d\mu_j$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur chaque ω_j; on désigne par $D_j(\omega_j)$ sa densité sur un ω_j donné, et par E_j son support, c'est-à-dire la réunion des ω_j où $D_j(\omega_j) \neq 0$;

pour obtenir $d\mu_{j+1}$ à partir de $d\mu_j$, on partage chaque $\omega = \omega_j$ contenu dans E_j en quatre sous-intervalles égaux ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 (ce sont des ω_{j+1}) et on pose

$$(1)\qquad \begin{aligned} D_{j+1}(\omega^1) &= D_{j+1}(\omega^4) = D_j(\omega) - 1 \\ D_{j+1}(\omega^2) &= D_{j+1}(\omega^3) = D_j(\omega) + 1\,. \end{aligned}$$

Enfin, on pose $d\mu = \lim d\mu_j$ et $E = \lim E_j = \cap E_j$.

Une autre définition de E est l'ensemble de tous les points $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 4^{-j}$ $(x_1 = 0, 1, 2, 3)$ tels que

$$(2)\qquad 1 + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon(x_j) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

où $\varepsilon(0) = \varepsilon(3) = -1$ et $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = 1$. Si l'on considère les $\varepsilon(x_j)$ comme des variables aléatoires indépendantes, la probabilité de (2) est nulle, donc l'ensemble E est de mesure nulle.

Pour chaque intervalle I, nous écrivons $|I|$ pour sa longueur, et nous posons $D(I) = \frac{1}{|I|}\,\mu(I)$. Alors $D(\omega_j) = D_j(\omega_j)$ pour tout intervalle ω_j,

et l'on prouve aisément par récurrence que, pour deux intervalles ω_j ayant une extrémité commune, soit ω_j' et ω_j'', on a

$$(3) \qquad |D(\omega_j') - D(\omega_j'')| \leqq 2 .$$

Etant donné l'intervalle I, soit j le plus petit entier tel que $4^{-j} \leqslant |I|$. Désignons par $\sum \omega_j$ la réunion des ω_j contenus dans I, par $\sum \omega_{j+1}$ la réunion des ω_{j+1} contenus dans $\overline{I - \Sigma \omega_j}$ (fermeture du complémentaire de $\sum \omega_j$ par rapport à I), par $\sum \omega_{j+2}$ la réunion des ω_{j+2} contenus dans $\overline{I - \Sigma \omega_j - \Sigma \omega_{j+1}}$, et ainsi de suite. Remarquons que chaque somme $\sum$ contient au plus 6 termes (figure 2). Avec les notations évidentes nous avons

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mu(I) &= \mu(\textstyle\sum \omega_j) + \mu(\sum \omega_{j+1}) + \dots = \\ &= \textstyle\sum |\omega_j| D(\omega_j) + \sum |\omega_{j+1}| D(\omega_{j+1}) + \dots \end{aligned}$$

Soit ω_{j-1}^I un ω_{j-1} coupant I (il en existe au moins un, au plus deux). Dans la somme (4), on a

$$|D(\omega_j) - D(\omega_{j-1}^I)| \leqslant 1 \quad \text{si} \quad \omega_j \subset \omega_{j-1}^I$$

$$|D(\omega_j) - D(\omega_{j-1}^I)| \leqslant 3 \text{ sinon.}$$

(grâce à (3), écrit au rang $j-1$), et pour tout k

$$|D(\omega_{j+k}) - D(\omega_{j-1}^I)| \leqslant 3 + k .$$

Donc

$$|\mu(I) - |I| D(\omega_{j-1}^I)| \leqslant 3 \textstyle\sum |\omega_j| + (3+1) \sum (\omega_{j+1}) + \dots \subseteq$$

$$\leqslant 3|I| + 6 \sum_{k=1}^{\infty} k\, 4^{-j-k} \leqslant 10|I| .$$

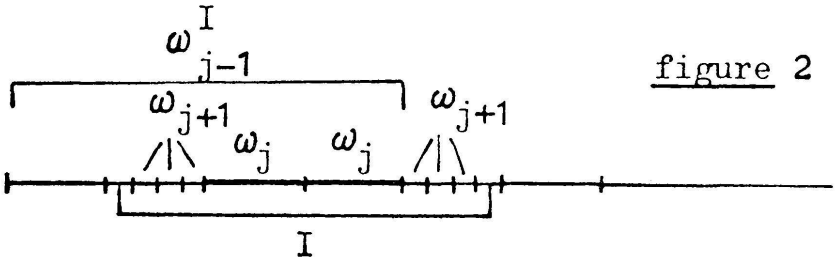

figure 2

Si maintenant I et I' sont deux segments égaux ayant un point commun, on peut choisir $\omega_{j-1}^I = \omega_{j-1}^{I'}$. Donc

$$(5) \qquad |\mu(I) - \mu(I')| < 20|I| .$$

En désignant par f une primitive de μ, cela signifie qu'on a

$$(6) \qquad |f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| < 20\,h$$

quels que soient x réel et $h > 0$, donc la mesure μ construite est presque lisse.

Cela établit la validité de l'exemple donné en [5].

Une variante intéressante est la suivante. Donnons-nous une suite positive c_j telle que $c_0 = 1$, $c_{j+1} = c_j$ ou $\frac{1}{2}c_j$ $(j=0, 1, \ldots)$ et $\sum_1^\infty c_j^2 = \infty$. Au lieu de (1), posons

$$D_{j+1}(\omega^\alpha) = D_j(\omega) + \varepsilon_{j+1}(\omega^\alpha)\,c_{j+1} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)\,,$$

où les $\varepsilon_{j+1}(\omega^\alpha)$ valent ± 1 et sont choisis comme suit: si la densité de $d\mu_j$ sur l'intervalle ω_j qui est immédiatement à gauche (resp. à droite) de ω est supérieure à $D_j(\omega)$, on prend $\varepsilon_{j+1}(\omega^1) = 1$, (resp. $\varepsilon_{j+1}(\omega^4) = 1$), et sinon $\varepsilon_{j+1}(\omega^1) = -1$ (resp. $\varepsilon_{j+1}(\omega^4) = -1$); en outre,

$$\varepsilon_{j+1}(\omega^1)\,\varepsilon_{j+1}(\omega^2) = \varepsilon_{j+1}(\omega^3)\,\varepsilon_{j+1}(\omega^4) = -1\,.$$

On vérifie par récurrence, grâce au fait que chaque c_j divise les précédents, que les $D_j(\omega_j)$ sont $\geqslant 0$ et multiples de c_j.

Si l'on exclut les nombres x de la forme $p4^{-n}$, chaque x est contenu dans un ω_j unique (pour j fixé). Posons

$$\varepsilon_j(x) = \varepsilon_j(\omega_j) \qquad \text{si} \qquad x \in \omega_j\,.$$

Les $\varepsilon_j(x)$ sont des variables aléatoires indépendantes, et l'ensemble E support de $d\mu$ est défini par les inégalités

$$1 + \sum_{j=1}^{k} c_j \varepsilon_j(x) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,.$$

En vertu de l'hypothèse $\sum_1^\infty c_j^2 = \infty$ et du théorème de Rademacher-Khintchine-Kolmogoroff, ce système d'inégalités a une probabilité nulle, c'est-à-dire que E est de mesure nulle.

Au lieu de (3), on a maintenant

$$|D(\omega_j') - D(\omega_j'')| \leqslant 2c_j$$

(en fait, d'après le choix des c_j et des ε_j, c'est nécessairement 0, c_j ou $2c_j$). En poursuivant les calculs comme ci-dessus, on obtient au lieu de (5)

$$|\mu(I) - \mu(I')| < 20\,c_{j-1}\,|I|$$

et au lieu de (6)

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| \leqslant h\varphi(h)$$

dès que $\varphi(h)$ est une fonction croissante telle que $\varphi(4^{-j}) \geqslant 20\, c_{j-1}$.

On obtient finalement le résultat suivant: *si $\varphi(h)$ est une fonction positive croissante, telle que $\varphi(4h) \leqslant 2\,\varphi(h)$ et*

$$\int_0^1 \varphi^2(h)\,\frac{dh}{h} = \infty\,,$$

il existe une mesure positive $d\mu$, *dont le support est un ensemble fermé de mesure nulle, et dont une primitive* f *satisfait à la condition*

$$\omega_2(f,h) = 0\big(h\varphi(h)\big) \qquad (h \to 0)\,.$$

[Il suffit de choisir pour c_j la plus grande puissance négative de 2 inférieure à $\frac{1}{20}\,\varphi(4^{-j-1})$].

Comme l'observe Shapiro dans [6], c'est (à la condition de régularité sur φ près) le meilleur résultat possible. En effet, il résulte d'un théorème de Stein et Zygmund (voir encore [6], appendice) que si f est une fonction continue telle que

$$\int_0^1 \big(\omega_2(f,h)\big)^2\,\frac{dh}{h} < \infty\,,$$

f est absolument continue, avec une dérivée de carré sommable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Besicovitch, A. S. The Kakeya problem. *Amer. Math. Monthly*, 70 (1963), 697-706.

[2] Donoghue, W. F., Jr. Functions which are polynomials on a dense set. *London Math. Soc.*, 39 (1964), 533-536.

[3] Duren, P. L., H. S. Shapiro, and A. L. Shields. Singular measures and domains not of Smirnov type. *Duke Math. J.*, 33 (1966), 247-254.

[4] Mandelbrojt, S. *Séries adhérentes, régularisations des suites, applications.* Gauthier-Villars, 1952; voir aussi: Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions. *The Rice Institute Pamphlet*, 29 (1942), 1-142.

[5] Piranian, G. Two monotonic, singular, uniformly almost smooth functions. *Duke Math. J.*, 33 (1966), 255-262.

[6] Shapiro, H. S. Monotonic singular functions of high smoothness. *Michigan Math. J.* (sept. 1968, à paraître).

(Reçu le 27 Juin 1968)

Faculté des Sciences
de l'Université de Paris à Orsay
91-Orsay