SUR QUELQUES RELATIONS ARITHMÉTIQUES

Autor(en): **Mandelbrojt, S.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43222

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES RELATIONS ARITHMÉTIQUES

S. MANDELBROJT

A la mémoire de Jean Karamata

Nous désirons démontrer quelques faits — inégalités ou égalités — dont les énoncés sont totalement dépourvus de toute notion de la théorie des fonctions. Il s'agit en réalité uniquement des propriétés des suites simples, ou doubles, assez inattendues d'apparence.

Mais les démonstrations, que nous fournissons de ces faits, sont basées néanmoins sur des théorèmes connus, parfois difficiles, de la théorie des fonctions analytiques. Le passage de ces théorèmes « analytiques » à nos énoncés est assez simple. Quelques-uns de ces énoncés peuvent, à leur tour, fournir immédiatement les théorèmes d'Analyse sur lesquels ils se basent.

Il serait, par conséquent, *très intéressant de pouvoir démontrer nos énoncés directement d'une manière élémentaire*; c'est-à-dire de fournir une démonstration dépourvue de toute notion de la théorie des fonctions. Chose à laquelle je ne suis pas parvenu.

THÉORÈME 1. *Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs croissants (strictement) vers l'infini, et soit $\{a_n\}$ une suite de nombres complexes.*

Supposons les deux conditions suivantes satisfaites :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty \tag{1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n} = 0\,, \qquad \inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0\,, \tag{2}$$

et posons pour $x>0$, assez petit,

$$A(x) = \liminf_{m\to\infty} \left[m!\,|\sum a_n \lambda_n^m x^{\lambda_n}|^{-1}\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{3}$$

Pour $0<x<1$, la fonction

$$B(x) = A^2(x) - \log^2 x$$

est non négative, non croissante, et on a :

$$B(x) \leq \pi^2 D^2 .$$

THÉORÈME 2. *Soit* $\{a_n\}$ *une suite de nombres entiers, satisfaisant à la condition*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|}{n} = 0 .$$

Posons pour $x>0$

$$d_n(x) = a_0 x^n + C_n^1 a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$D(x) = \limsup_{n\to\infty} |d_n(x)|^{\frac{1}{n}} .$$

La fonction $D(x)$ *est continue à droite au point* $x = 0$, *elle possède une dérivée à droite en ce point,* $D'_+(0)$; *on a*

$$|D'_+(0)| \leq 1 .$$

Et, en posant,

$$D'_+(0) = \cos \pi\varphi ,$$

φ *est un nombre rationnel.*

Pour une suite $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_1<\lambda_2, \ldots, \lambda_n\to\infty)$, posons:

$$N(x) = \sum_{\lambda_n<x} 1 ;$$

Et, pour tout $0<\alpha<1$:

$$D(\alpha) = \limsup_{x\to\infty} \frac{N(x) - N(\alpha x)}{x(1-\alpha)} .$$

On sait que lorsque $\alpha\to 1$, $D(\alpha)$ tend vers une limite D_M, appelée densité maximum de $\{\lambda_n\}$ (Pólya). En désignant par $D^{\cdot}$ la densité supérieure de $\{\lambda_n\}$:

$$D^{\cdot} = \limsup_{x\to\infty} \frac{N(x)}{x} ,$$

on a $D^{\cdot} \leq D_M$.

On a le théorème suivant qui généralise le théorème 1.

THÉORÈME 3. *Soit* $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_1<\lambda_2, \ldots; \lambda_n \to \infty)$; *supposons que (2) est satisfait et que* $D^{\cdot}<\infty$. *Soit* $A(x)$ *la fonction définie par (3). La limite*

$$\lim_{x\to 0} \left(A(x) + \log x\right) = h \tag{4}$$

existe. La fonction

$$B(x) = A^2(x) - (\log x + h)^2 \tag{5}$$

est non-négative, non-croissante, et

$$A^2(x) - (\log x - h)^2 < \pi^2 D^2{}_M \,. \tag{6}$$

Si D existe (c'est-à-dire si (1) est satisfait), on a $\mathrm{h} = 0$.

On voit, d'après la dernière ligne de cet énoncé que le théorème 3 contient le théorème 1.

Commençons donc par la démonstration du théorème 3.

Pour $s = \sigma + it$, la somme $(-1)^m \Sigma\, a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n s}$ représente, pour $\sigma > 0$ (où cette série converge, en vertu de $D^{\cdot} < \infty$ et de (2)), $f^{(m)}(s)$, la dérivée $m^{\text{ième}}$ de la somme $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$.

$A^{-1}(e^{-\sigma})$ représente, par conséquent, le rayon de convergence de la série de Taylor de $f(s)$ autour du point σ.

En désignant par σ_H l'abscisse d'holomorphie de la série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, la relation (4) est immédiate avec $h = -\sigma_H$. (La quantité h, qui est évidemment non négative, peut être égale à $+\infty$, et, dans ce cas $A(e^{-\sigma}) = \infty$ pour tout $\sigma > 0$.)

Des considérations simples (existence d'au moins un point singulier sur le cercle de convergence, d'une série de Taylor), montrent que $B(x)$ est une fonction non croissante; et, le théorème de Pólya-V. Bernstein [1] d'après lequel $f(s)$ admet au moins un point singulier sur tout segment de longueur $2\pi D_M$ de l'axe d'holomorphie $\sigma = \sigma_H$, montre que

$$0 \leqq B(x) \leqq \pi^2 D_M^2 \,.$$

Ce qui fournit (6).

Pour la démonstration du théorème 2 remarquons que, d'après notre théorème concernant les arguments des singularités situées sur le cercle de convergence d'une série de Taylor, $\pi\varphi$ représente l'argument de la singularité de la série $\Sigma a_n z^n$ située sur $|z| = 1$, la plus voisine du point $z = 1$ [3]. Or, d'après un théorème classique de Carlson [2], si les a_n sont entiers et si le rayon de convergence de cette série est égal à un, seulement un des deux cas suivants peut se présenter:

1) le cercle de convergence est une coupure,
2) la série représente une fonction de la forme $P(z)/Q(z)$, P et Q étant des polynomes, $Q(z)$ n'admettant que des racines entières de l'unité comme zéros. Il en résulte que, soit $\varphi = 0$, soit $\varphi = p/q$, où p et q sont entiers.

Le théorème qui suit peut être considéré comme une traduction pure et simple d'un théorème d'Ostrowski [5] concernant les singularités d'une série de Dirichlet (à la valeur des constantes considérées près)

THÉORÈME 4. *Soit $D^{\cdot}$ la densité supérieure de la suite $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_1<\lambda_2, \ldots;$ $\lambda_n \to \infty)$; supposons que (2) est satisfait et que :*

$$\liminf (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0 .$$

On a pour $x \geqq 0$:

$$A(x) \leqq -3 \log (hD^{\cdot}) D^{\cdot} + 4\pi D^{\cdot} - \log x .$$

Les constantes de cette dernière inégalité sont obtenues en utilisant un théorème que j'ai énoncé dans [4].

Remarquons que l'expression $D(x)$ de la page 2 représente le rayon de convergence de la série $\Sigma d_n (x)/w+x)^n$, qui, pour $|w|$ assez grand, donne la fonction (de w) représentée par $(\Sigma a_n/w^n)(w+x)/w$. On obtient alors facilement, en utilisant les raisonnements qui ont servi pour démontrer les théorèmes 1 et 2, et en y posant $x = 1$, les deux énoncés suivants, qui portent uniquement sur les suites de nombres:

A. *Si les λ_n sont entiers, si*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n} = 0$$

et si la densité

$$D = \lim \frac{n}{\lambda_n}$$

existe, on a

$$\limsup_{m\to\infty} \Big(\Big| \sum_{\lambda_n \leqq m} C_m^{\lambda_n} a_n\Big|^{\frac{1}{m}} \geqq |e^{i\pi D} + 1| .$$

B. *Si les a_n sont entiers, et si*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|}{n} = 0 ,$$

on a

$$\limsup_{m\to\infty} \Big| \sum_{n\leq m} C_m^n a_n \Big|^{\frac{1}{m}} = |e^{i\pi\beta} + 1|$$

où β est un nombre rationnel.

Et, enfin, en posant dans le théorème 1, $x = 1$, on obtient

C. *Si*

$$\inf (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$$

et si D existe, on a

$$\liminf_{m\to\infty} \Big| m! \Big(\sum a_n \lambda_n^m\Big)^{-1} \Big|^{\frac{1}{m}} \leq \pi D .$$

[1] BERNSTEIN, V., *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet.* Paris, Gauthier-Villars, 1933.
[2] CARLSON, *Math. Zeitstr.*, t. 9, 1921.
[3] MANDELBROJT, S., *C. R. Académie des Sciences*, t. 204, 1937.
[4] —— *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications.* Gauthier-Villars, 1952.
[5] OSTROWSKI, A., *Sitzungsber. d. Preuss. Akad.*, 1923.

(Reçu le 1er septembre 1968)

Prof. S. Mandelbrojt
Collège de France
Paris.

vide-leer-empty