III. Polyèdres réguliers

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

III. Polyèdres réguliers

3.1. Nous considérons l'angle dièdre formé par deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier à l'intérieur du solide. Nous allons désigner cet angle dièdre par

$$T, \qquad H, \qquad O, \qquad D, \qquad \text{ou } I$$

selon qu'il s'agit d'un

tétra-, hexa-, octa-, dodéca-, ou icosa-

èdre régulier. Le hexaèdre régulier est le cube, $H = \pi/2$. On peut calculer tous ces angles par trigonométrie sphérique; notons les résultats:

$$\cos T = \tfrac{1}{3}, \cos H = 0, \cos O = -\tfrac{1}{3}, \cos 2D = -\tfrac{3}{5}, \cos 2I = \tfrac{1}{9}.$$

Il résulte des trois premières valeurs que

$$T - 2H + O = 0 \tag{1}$$

ce que le lecteur peut aussi voir par géométrie élémentaire. Cette relation (1) est unique en son genre — c'est un premier aperçu de notre résultat principal qui sera formulé précisément au n° 3.6.

3.2. *Les rapports*

$$T/H, \qquad O/H, \qquad D/H, \qquad I/H$$

sont irrationnels.

Cette proposition résulte immédiatement des valeurs rationnelles des cosinus données au n° 3.1 et du théorème du n° 1.2.

3.3. *Le rapport T/O est irrationnel.*

En effet, si T/O était rationnel, H/O le serait aussi par la relation (1) du n° 3.1. Mais H/O est irrationnel par le théorème du n° 3.2.

3.4. *Si les entiers ordinaires* l, m′, h′ *et* k′ *satisfont à l'équation*

$$lT + m'I = h'H + k'D,$$

alors

$$l = m' = h' = k' = 0.$$

Nous pouvons admettre sans perte de généralité que $m' = 2m$ et $k' = 2k$ sont des nombres pairs et $h' = 4h$ est divisible par 4. En effet, si ce n'était pas le cas il suffirait de multiplier la relation donnée par 4 et de changer la notation.

Nous voulons donc établir que la relation

$$(*) \qquad lT + 2mI = 4hH + 2kD$$

est impossible en nombres entiers ordinaires l, m, h et k qui ne sont pas tous $= 0$. Dans le présent n° 3.4 je ne considère que le cas où k, l et m sont tous *positifs*. Puisque $4H = 2\pi$, la relation (*) est équivalente à la suivante

$$(**) \qquad e^{ilT}\, e^{i2mI} = e^{i2kD}\,.$$

Mais, voir n° 3.1, on obtient, en développant les puissances des binômes,

$$e^{i2kD} = \left(\frac{-3-i4}{5}\right)^k = K + K'\,i\,,$$

$$e^{ilT} = \left(\frac{1+2i\sqrt{2}}{3}\right)^l = L + L'\,i\sqrt{2}$$

$$e^{i2mI} = \left(\frac{1-4i\sqrt{5}}{9}\right)^m = M + M'\,i\sqrt{5}$$

où K, K', L, L', M et M' sont des nombres rationnels.

Observons que $K' = 0$ entraînerait $K = \pm 1$, et ainsi D/π serait rationnel, ce qui n'est pas le cas, voir n° 3.2. Donc $K' \neq 0$ et par le même raisonnement $L' \neq 0$, $M' \neq 0$.

Il suit de (**) que

$$L'\,M\sqrt{2} + LM'\sqrt{5} = K'\,.$$

Observons que $L = 0$ entraînerait $M \neq 0$ et ainsi $\sqrt{2}$ serait rationnel. Donc $L \neq 0$ et par un raisonnement semblable $M \neq 0$.

Donc $LML'M' \neq 0$. Mais en élevant au carré l'équation précédente on obtient que

$$LML'\,M'\sqrt{10}$$

est un nombre rationnel. Cette conséquence absurde démontre que (*) est impossible si l, m et k sont positifs.

3.5. Le cas traité au numéro précédent, où k, l et m sont positifs, est décisif: Les autres cas se laissent traiter de la même manière ou sont encore plus simples.

Par exemple, si $l<0$ on développera la $(-l)$ième puissance du binôme

$$e^{ilT} = \left(\frac{1-2i\sqrt{2}}{3}\right)^{-l} = L + L' i \sqrt{2}$$

et on aura les mêmes conséquences qu'au n° 3.4.

Si $l = 0$ et $m = 0$ on a nécessairement $k = 0$; dans le cas contraire, e^{iD} serait, en vertu de (**), une racine de l'unité ce qui contredirait la proposition du n° 3.2.

Enfin le cas ou $l = 0$, $m \neq 0$ et $k \neq 0$ est aussi exclu; on en pourrait conclure, voir l'équation (**) et les formules et les raisonnements du n° 3.4 qui la suivent, que K' et M' sont rationnels et non-nuls et que

$$M + M' i \sqrt{3} = K + K' i$$

donc que $\sqrt{3}$ est rationnel ce qui est absurde.

3.6. *Si* x_1, x_2, x_3, x_4 *et* x_5 *sont des entiers ordinaires et*

$$x_1 T + x_2 H + x_3 O + x_4 D + x_5 I = 0,$$

on a nécessairement

$$2x_1 = -x_2 = 2x_3, \qquad x_4 = x_5 = 0.$$

Voici un autre énoncé de la même proposition:

Excepté une transformation triviale l'équation (1) *du n°* 3.1 *est l'unique relation linéaire homogène à coefficients entiers ordinaires entre les cinq angles, T, H, O, D et I.*

Le cas de cet énoncé où $x_3 = 0$ a été démontré aux n°s 3.4 et 3.5. On y ramène le cas où $x_3 \neq 0$ et la relation considérée n'est pas une transformée triviale de (1) en éliminant O [1]).

(Reçu le 16 Juillet 1968)

Dept. mathematics
Stanford University
Stanford, California 94305
Etats-Unis

[1]) La proposition du n° 3.6 est due à H. LEBESGUE; voir *Annales de la Société polonaise de Mathématique*, 71, 193-226, 1938.

vide-leer-empty