2. Préliminaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_q} \sum_{\substack{n_1 \le x_1 \\ n_2 \le x_2 \\ \cdots\cdots \\ n_q \le x_q}} f(n_1, n_2, \dots, n_q) = \tag{2}$$

$$= C x_1^{ia_1} x_2^{ia_2} \dots x_q^{ia_q} L_1(\log x_1) \dots L_q(\log x_q) + o\,[1]$$

Nous démontrerons ce résultat en nous plaçant dans le cas où $q = 2$. Le lecteur verra facilement comment la démonstration doit être modifiée pour traiter le cas où $q > 2$.

Pour simplifier l'écriture, nous remplacerons n_1 et n_2 par m et n et x_1 et x_2 par x et y.

En restant dans le cas où $q = 2$, nous préciserons — comme on peut le faire pour le résultat de Halász — dans quel cas on a chacune des circonstances (a) et (b).

De plus, nous donnerons des théorèmes fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$|f(m, n)| \leqslant 1 \text{ quels que soient } m \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

possède une valeur moyenne non nulle, ou pour que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \le x \\ n \le y}} f(m, n)$$

tende vers une limite lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport.

Ici encore, le cas où $q = 2$ n'est pas essentiellement différent du cas où $q > 2$.

Enfin, nous indiquerons deux résultats particuliers intéressants.

1.3. Il est entendu une fois pour toutes que, tout au long de cet article, la lettre p représente toujours un nombre premier. Les lettres m, n, d, j, k, r, s représentent des entiers; m, n, d sont toujours des entiers $\geqslant 1$.

Une somme qui ne contient aucun terme est considérée comme nulle, et un produit qui n'a aucun facteur est considéré comme égal à 1.

2. Préliminaires

2.1. Il nous est utile de donner plus de précisions sur les résultats de Halász.

f étant fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1,$$

Halász montre d'abord qu'il existe au plus un u réel tel que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p}\{1-\Re e\,[f(p)\,p^{-iu}]\} < +\infty \text{ [1]} \tag{3}$$

On a ensuite les résultats suivants:

1. S'il n'existe aucun u réel tel que l'on ait (3), f possède une valeur moyenne nulle.

2. Supposons maintenant qu'il existe un u réel tel que l'on ait (3), soit u_0.

Alors,

a. Si $2^{-iru_0} f(2^r) = -1$ pour tout $r \geqslant 1$, f possède une valeur moyenne nulle.

b. Si $2^{-iru_0} f(2^r) \neq -1$ pour au moins un $r \geqslant 1$, on a (1) avec $a = u_0$ et

$$L_1(t) = \exp\left\{i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im\,[f(p)\,p^{-iu_0}]\right\}.$$

2.1.1. Ajoutons que, lorsque l'on est dans le cas 2 avec $u_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\sum \frac{1}{p}\{1-\Re e\, f(p)\} < +\infty,$$

on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} f(n) = \prod_{p \leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right] + o\,[1].$$

Ceci est une conséquence inmédiate d'un théorème que nous avons établi ailleurs [2].

2.2. Il nous est utile aussi de rappeler quelques notions et quelques résultats élémentaires concernant les fonctions de $\mathscr{A}_2$, que nous avons indiqués dans l'article cité au paragraphe 1.1 (et qui se généralisent naturellement à $\mathscr{A}_q$).

2.2.1. Dans $\mathscr{A}_2$ on définit l'opération de convolution de la façon suivante:

$f * g$ est la fonction h définie par

$$h(m,n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right).$$

La convolution est commutative et associative.

---

[1]) Il est clair que, pour chaque p, $1 - \mathrm{Re}\,[f(p)\,p^{-iu}] \geqslant 0$.

2.2.2. f et g étant deux fonctions de $\mathscr{A}_2$ et w_1 et w_2 deux variables complexes, si les séries doubles

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}$$

sont absolument convergentes pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \alpha$ et $\mathfrak{Re}\, w_2 = \beta$, il en est de même de la série double

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{h(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}, \qquad \text{où} \qquad h = f * g,$$

et on a pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \alpha$ et $\mathfrak{Re}\, w_2 = \beta$

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{h(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left(\sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right) \left(\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right).$$

2.2.3. Toute fonction f de $\mathscr{A}_2$ telle que $f(1, 1) \neq 0$ peut se mettre sous la forme

$$f = g * h,$$

où $h(m, n) = f(m, 1) f(1, n)$ et g satisfait à

$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

Si f appartient à $\mathfrak{M}_2$, les fonctions g et h appartiennent aussi à $\mathfrak{M}_2$.

2.3. Indiquons aussi le résultat suivant:

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(m, n)| \leqslant 1$ quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Supposons que

1° On n'a pas

$$|f(2, 1)| = 1 \text{ et } f(2^r, 1) = (-1)^{r+1} f(2, 1)^r \text{ pour tout } r > 1;$$

2° On n'a pas

$$|f(1, 2)| = 1 \text{ et } f(1, 2^s) = (-1)^{s+1} f(1, 2)^s \text{ pour tout } s > 1.$$

Alors la fonction g considérée au paragraphe 2.2.3 satisfait à

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m\, n} < +\infty, \tag{4}$$

de sorte que la série double

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}$$

est absolument convergente pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \mathfrak{Re}\, w_2 = 1$.

De plus, on a pour $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\prod \left\{ \left[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \tag{5}$$

le produit infini étant absolument convergent.

On trouvera dans notre article « On some sets of pairs of positive integers » [1] (du haut de la page 272 à la fin du paragraphe 3.2.5) la démonstration, sous les mêmes hypothèses, de (4) et de la formule que donne (5) en y prenant $w_1 = w_2 = 1$. On verra immédiatement quelle petite modification de la démonstration permet d'obtenir (5) avec w_1 et w_2 quelconques satisfaisant à $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$.

Remarquons que les hypothèses 1° et 2° sont satisfaites en particulier si l'on a

$$f(2^r, 1) = 0 \text{ pour tout } r \geqslant 1 \quad \text{et} \quad f(1, 2^s) = 0 \text{ pour tout } s \geqslant 1.$$

Le facteur correspondant à $p = 2$ dans le produit infini au second membre de (5) est alors égal à 1, et (5) s'écrit

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}.$$

C'est ce cas particulier que nous utiliserons.

2.4. Nous utiliserons aussi la remarque immédiate suivante:

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_2$ et soient f_1 et f_2 les fonctions de $\mathfrak{M}_2$ déterminées par

$$f_1(p^r, p^s) = \begin{cases} f(p^r, p^s) & \text{si } p > 2, \\ 0 & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

et

$$f_2(p^r, p^s) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 2, \\ f(2^r, 2^s) & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

pour r et $s \geqslant 0$ et $r + s > 0$.

Alors on a

$$f = f_1 * f_2.$$

---

[1]) Journal of Number Theory, 1 (1969), p. 261-279.