3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 DANS LE CAS OU q = 2.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Démonstration du théorème 1 dans le cas ou $q = 2$.

Remarquons d'abord que, d'après les résultats de Halász, si f est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(m, n)| \leqslant 1$ quels que soient m et $n \geqslant 1$, il existe au plus un u réel tel que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-iu}]\} < +\infty$$

et au plus un u réel tel que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-iu}]\{ < +\infty$$

Ceci dit, nous allons maintenant démontrer le théorème 1 dans le cas où $q = 2$, sous la forme plus précise suivante:

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(\mathrm{m}, \mathrm{n})| \leqslant 1$ quels que soient m *et* $\mathrm{n} \geqslant 1$.

1. *Si l'on a l'une au moins des conditions*

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-iu}]\} = +\infty \quad \textit{pour tout } u \textit{ réel}$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-iu}]\} = +\infty \quad \textit{pour tout } u \textit{ réel,}$$

f possède une valeur moyenne nulle.

2. *S'il existe* a_1 *et* a_2 *réels tels que*

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-ia_2}]\} < +\infty,$$

il y a deux cas possibles :

Ou bien

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0,$$

et alors f possède une valeur moyenne nulle.

Ou bien

$$\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}}\right)\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}}\right) \neq 0,$$

et alors on a quand x *et* y *tendent vers* $+\infty$ *indépendamment l'un de l'autre*

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} f(m, n) = C\, x^{ia_1} y^{ia_2} L_1(\log x)\, L_2(\log y) + o\,[1], \tag{6}$$

ou C *est une constante complexe non nulle et* L_1 *et* L_2 *sont les fonctions définies sur* $\mathscr{R}^+$ *par*

$$L_1(t) = \exp\left\{i \sum_{p\leq e^t} \frac{1}{p}\, Im\,[f(p, 1)\, p^{-ia_1}]\right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp\left\{i \sum_{p\leq e^t} \frac{1}{p}\, Im\,[f(1, p)\, p^{-ia_2}]\right\},$$

qui satisfont à

$$|L_j(t)| = 1 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbf{R}^+$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{L_j(\lambda t)}{L_j(t)} = 1 \quad \textit{pour tout } \lambda > 0 \quad (j = 1 \textit{ ou } 2),$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$.

3.1. On peut d'abord écrire

$$f = f_1 * f_2, \tag{7}$$

où f_1 et f_2 sont définies comme il est dit au paragraphe 2.4.

Définissons maintenant les fonctions arithmétiques h_1 et h_2 par

$$h_1(m) = f_1(m, 1) \quad \text{et} \quad h_2(n) = f_1(1, n).$$

On voit que h_1 et h_2 sont multiplicatives et que l'on a

$$h_1(p^r) = \begin{cases} f(p^r, 1) \text{ si } p > 2, \\ 0 \quad \text{ si } p = 2, \end{cases} \tag{8}$$

et

$$h_2(p^r) = \begin{cases} f(1, p^r) \text{ si } p > 2, \\ 0 \quad \text{ si } p = 2. \end{cases} \tag{9}$$

De plus, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.3., on a

$$f_1 = g_1 * h, \tag{10}$$

où $h(m, n) = h_1(m)\, h_2(n)$ et g_1 est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|g_1(m, n)|}{m\, n} < +\infty \tag{11}$$

et, pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \mathfrak{Re}\, w_2 = 1$,

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f_1(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f_1(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_1(1, p^k)}{q^{kw_2}} \right] \right\},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \tag{12}$$

le produit infini étant absolument convergent.

(7) et (10) donnent $f = g * h$, où $g = f_2 * g_1$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 2.2.2, il résulte de (11) et de ce que

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|f_2(m, n)|}{m\, n} = \sum_{j,k \geq 0} \frac{|f(2^j, 2^k)|}{2^{j+k}} < +\infty,$$

que l'on a

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m\, n} < +\infty$$

et, pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \mathfrak{Re}\, w_2 = 1$,

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{f_2(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right) \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{g_1(m_1\, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right),$$

ce qui donne, compte tenu de (12),

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} u^{w_2}} =$$

$$\left\{ \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{jw_1 + kw_2}} \right\} \prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}.$$

En définitive, on a le résultat suivant:

h_1 et h_2 étant les fonctions de $\mathfrak{M}_1$ déterminées par (8) et (9), on a

$$f = g * h,$$

où $h(m, n) = h_1(m)\, h_2(n)$ et g est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m\, n} < +\infty \tag{13}$$

et, pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \mathfrak{Re}\, w_2 = 1$,

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\left\{ \sum_{j,k \geq 2} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j w_1 + k w_2}} \right\} \prod_{p > 2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j w_1 + k w_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{j w_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{k w_2}} \right] \right\}, \tag{14}$$

le produit infini étant absolument convergent.

3.2. Compte tenu de ce que $h(m, n) = h_1(m)\, h_2(n)$, l'égalité $f = g * h$ s'écrit

$$f(m, n) = \sum_{\substack{d_1 / m \\ d_2 / n}} g(d_1, d_2)\, h_1\left(\frac{m}{d_1}\right) h_2\left(\frac{n}{d_2}\right)$$

quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Ceci donne, pour x et $y \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} g(m, n)\, H_1\left(\frac{x}{m}\right) H_2\left(\frac{y}{n}\right), \tag{15}$$

où H_1 et H_2 sont les fonctions définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$H_1(x) = \sum_{m \leq x} h_1(m) \qquad \text{et} \qquad H_2(x) = \sum_{n \leq x} h_2(n).$$

Il est clair que l'on a

$$|H_1(x)| \leqslant x \qquad \text{et} \qquad |H_2(x)| \leqslant x \quad \text{pour tout } x \geqslant 1. \tag{16}$$

3.3. Ceci dit, supposons d'abord que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \mathfrak{Re}\, [f(p, 1)\, p^{-iu}]\} = +\infty$$

pour tout u réel.

Il en résulte que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \mathfrak{Re}\, [h_1(p)\, p^{-iu}]\} = +\infty \text{ pour tout } u \text{ réel},$$

ce qui entraine, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.1, que la fonction h_1 possède une valeur moyenne nulle. Autrement dit, $\frac{1}{x} H_1(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$

Mais (15) peut s'écrire

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{g(m, n)}{m\, n} \cdot \frac{m}{x} H_1\left(\frac{x}{m}\right) \cdot \frac{n}{y} H_2\left(\frac{y}{n}\right).$$

D'après (16), le terme général de la somme au second membre est de module au plus égal à $\frac{|g(m, n)|}{m\, n}$.

De plus, ce terme général tend vers zéro quand x et y tendent vers $+\infty$ puisque $\frac{m}{x} H_1\left(\frac{x}{m}\right)$ tend vers zéro.

Compte tenu de (13), il résulte de là que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers zéro quand x et y tendent vers $+\infty$. Autrement dit, f possède une valeur moyenne nulle.

On voit de même que f possède une valeur moyenne nulle si l'on a

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel.}$$

3.4. Supposons maintenant qu'il existe a_1 et a_2 réels tels que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-ia_2}]\} < +\infty.$$

Il en résulte que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [h_1(p)\, p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [h_2(p)\, p^{-ia_2}]\} < +\infty,$$

et, d'après ce qui a été dit au paragraph 2.1, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} H_1(x) = C_1' x^{ia_1} K_1(\log x) + o[1] \tag{17}$$

et

$$\frac{1}{x} H_2(x) = C_2' x^{ia_2} K_2(\log x) + o[1], \tag{18}$$

où C_1' et C_2' sont deux constantes complexes non nulles et, pour $t \geqslant 0$,

$$K_1(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im\,[h_1(p)\, p^{-ia_1}] \right\}$$

et

$$K_2(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im\,[h_2(p)\, p^{-ia_2}] \right\}.$$

Si l'on pose

$$C_1 = C_1' \exp\left\{ -\frac{i}{2} Im\,[f(2, 1)\, 2^{-ia_1}] \right\}$$

$$C_2 = C_2' \exp\left\{ -\frac{i}{2} Im\,[f(1, 2)\, 2^{-ia_2}] \right\},$$

et, pour $t \geqslant 0$,

$$L_1(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im\,[f(p, 1)\, p^{-ia_1}] \right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im\,[f(1, p)\, p^{-ia_2}] \right\},$$

on voit que l'on a pour $t \geqslant \log 2$

$$C_1' K_1(t) = C_1 L_1(t) \qquad \text{et} \qquad C_2' K_2(t) = C_2 L_2(t),$$

de sorte que (17) et (18) peuvent s'écrire

$$H_1(x) = C_1 x^{1+ia_1} L_1(\log x) + o[1] \tag{19}$$

et

$$H_2(x) = C_2 x^{1+ia_2} L_2(\log x) + o[x]. \tag{20}$$

C_1 et C_2 sont encore des constantes complexes non nulles et, comme on a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{K_1(\lambda t)}{K_1(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{K_2(\lambda t)}{K_2(t)} = 1 \qquad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$,

on a aussi

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{L_1(\lambda t)}{L_1(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{L_2(\lambda t)}{L_2(t)} = 1 \qquad \text{pour tout } \lambda > 0, \tag{21}$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$.

Notons que ceci entraine

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{L_1(\log kx)}{L_1(\log x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{L_2(\log kx)}{L_2(\log x)} = 1 \qquad \text{pour tout } k > 0. \tag{22}$$

3.4.1. Maintenant (15) donne pour x et $y \geqslant 1$

$$\frac{1}{x^{1+ia_1} y^{1+ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y)} \sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} f(m, n) =$$

$$= \sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} \cdot \frac{H_1\left(\frac{x}{m}\right)}{\left(\frac{x}{m}\right)^{1+ia_1} L_1\left(\log \frac{x}{m}\right)} \cdot \frac{H_2\left(\frac{y}{n}\right)}{\left(\frac{y}{n}\right)^{1+ia_2} L_2\left(\log \frac{y}{n}\right)} \cdot$$

$$\frac{L_1\left(\log \frac{x}{m}\right)}{L_1(\log x)} \cdot \frac{L_2\left(\log \frac{y}{n}\right)}{L_2(\log y)}.$$

Le terme général de la somme du second membre est de module au plus égal à $\dfrac{|g(m, n)|}{m\,n}$.

De plus, il résulte de (19), (20) et (22) que ce terme général tend vers $C_1 C_2 \dfrac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}}$ quand x et y tendent vers $+\infty$.

Compte tenu de (13), ceci entraine que, lorsque x et y tendent vers $+\infty$, la somme tend vers

$$C_1 C_2 \sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} f(m, n) = C x^{ia_1} y^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y) + o\,[1],$$

où

$$C = C_1 C_2 \sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}}.$$

3.4.2. Si $C = 0$, ceci implique que f possède une valeur moyenne nulle.

On voit donc que, pour établir le résultat annoncé, il ne reste plus qu'à montrer que l'on a

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} = 0$$

si, et seulement si,

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0.$$

Compte tenu de (14), il suffit de montrer que

$$\prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{j(1+ia_1)}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{k(1+ia_2)}} \right] \right\} = 0$$

si, et seulement si,

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 0.$$

Ceci résulte immédiatement de ce que tous les facteurs du produit autres que celui qui correspond à $p = 3$ sont non nuls.

En effet, on a pour chaque p

$$\left| \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right| \leqslant \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{1}{p^{j+k}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} - 1.$$

Pour $p > 3$, ceci est < 1 et par suite

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 1 + \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \neq 0.$$

4. Autres théorèmes

Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, f est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(m, n)| \leqslant 1$ quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Le théorème démontré au chapitre précédent fournit immédiatement des conditions nécessaires et suffisantes pour que f possède une valeur moyenne nulle, car il est clair que, lorsque l'on a (6), le module de l'expression