2. Etude de l'anneau des S-entiers

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Etude de l'anneau des S-entiers

Conservons les notations du §1. Puisque le groupe des classes de A est d'ordre fini (théorème (2)), il existe pour tout j tel que $1 \leq j \leq d$ un exposant $n_j \geq 1$ (l'ordre de la classe de $\mathfrak{p}_j$) tel que l'idéal $\mathfrak{p}_j^{n_j}$ soit principal, disons

$$\mathfrak{p}_j^{n_j} = x_j A \qquad (x_j \in A).$$

Il est clair que $v_j(x_j) = n_j$. En revanche, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_j$, on a $v_q(x_j) = 0$ (v_q désignant la valuation discrète normalisée associée à $\mathfrak{q}$: si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i$, $v_q = v_i$): dans le cas contraire, en effet, on aurait $x_j \in \mathfrak{q}$, donc $x_j A = \mathfrak{p}_j^{n_j} \subset \mathfrak{q}$, donc successivement $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{q}$ (contradiction!) puisque $\mathfrak{q}$ est premier et $\mathfrak{p}_j$ maximal.

Il résulte de là que les x_j sont des *S-unités*. Posons alors $t = x_1 x_2 \ldots x_d$ (c'est aussi une S-unité) et désignons par T la partie multiplicative $\{1, t, t^2, \ldots, t^m, \ldots\}$ de A.

Proposition 1.

(i) *Pour tout j tel que $1 \leqq j \leqq d$, on a $v_j(t) > 0$. Au contraire, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \notin D$ (on identifie pour simplifier les ensembles D et $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_d\}$), on a $v_q(t) = 0$.*

(ii) *L'anneau A_S des S-entiers de K est égal à l'anneau de fractions $T^{-1}A$.*

(iii) *A_S est un anneau de Dedekind.*

(iv) *L'application $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}A_S$ établit une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de A* n'appartenant pas à *D sur l'ensemble des idéaux premiers de A_S. Cette application « tue » les idéaux premiers appartenant à D: si $1 \leq j \leq d$, $\mathfrak{p}_j A_S = A_S$.*

(v) *L'application $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}A_S$ est une surjection de l'ensemble des idéaux entiers de A sur l'ensemble des idéaux entiers de A_S. Pour que $\mathfrak{a}A_S = A_S$, il faut et il suffit que tous les facteurs premiers de $\mathfrak{a}$ appartiennent à D.*

Démonstration:

(i) résulte de la définition de t. (iii) et (iv) sont des conséquences immédiates de (ii) et des propriétés des anneaux de fractions (voir [10], chap. 5, prop. 1 et 3). Enfin (v) résulte immédiatement de (iii) et (iv).

Reste à prouver (ii). L'inclusion $T^{-1}A \subset A_S$ est évidente, puisqu'on a déjà remarqué que t est une S-unité, donc que les $1/t^m$ $(m \geq 0)$ sont des S-entiers. Inversement, soit $y \in A_S$, et considérons le produit yt^m $(m \geq 0)$. En tout $\mathfrak{q} \notin D$, on a, d'après (i),

$$v_q(yt^m) = v_q(y) \geq 0.$$

En $\mathfrak{p}_j \in D$, on a, toujours d'après (i),

$$v_j(yt^m) = v_j(y) + mv_j(t) \geq v_j(y) + m.$$

Choisissons pour m une valeur $\geq \sup_j |v_j(y)|$ et posons $x = yt^m$. Pour toute valuation discrète normalisée v de K, on a alors $v(x) \geq 0$: donc $x \in A$, $y = x/t^m \in T^{-1}A$, et finalement $A_S \subset T^{-1}A$, ce qui achève de démontrer (ii), et la proposition.

3. Démonstration du théorème (3)

Nous noterons $z_1, z_2, \ldots, z_s$ les coordonnées dans l'espace $\mathbf{R}^s = \mathbf{R}^a \times \mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{r+1} \times \mathbf{R}^d$.

La démonstration se décomposera en quatre parties:

(a) *L'homomorphisme* Λ *a pour noyau* W.

En effet, si $x \in U_S$, l'égalité $\Lambda(x) = 0$ implique d'abord

$$|x|_{a+1} = \ldots = |x|_s = 1,$$

ce qui signifie que x est non seulement une S-unité, mais une unité de A; $\Lambda(x) = 0$ implique d'autre part $|x|_1 = \ldots = |x|_a = 1$, ce qui montre que cette unité x appartient au noyau de L, donc à W (théorème (1)); inversement, il est clair que $x \in W$ implique $\Lambda(x) = 0$. D'où (a).

(b) $\Lambda(U_S)$ *est un sous-groupe discret de* $\mathbf{R}^s$.

Les valeurs absolues $|.|_{a+1}, \ldots, |.|_s$ provenant de valuations discrètes, il est clair qu'on peut trouver dans $\mathbf{R}^d$ un voisinage V' de l'origine tel que la condition

$$(\log|x|_{a+1}, \ldots, \log|x|_s) \in V'$$

implique $|x|_{a+1} = \ldots = |x|_s = 1$, ce qui signifie (si $x \in U_S$) que x est en fait une unité de A. Soit alors V un voisinage *borné* de 0 dans $\mathbf{R}^a$: la double condition

$$x \in U_S \text{ et } \Lambda(x) \in V \times V'$$

peut s'écrire

$$x \in U \text{ et } L(x) \in V,$$