3. Nombre d'inversions d'une permutation.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Par suite, toute transposition est produit d'un nombre impair de générateurs π_i, et l'on peut définir les permutations paires (impaires) comme les produits d'un nombre pair (impair) de générateurs π_i. Or, une transformation de type a) appliquée à un produit de π_i augmente ou diminue de deux le nombre des facteurs, alors que ce nombre de facteurs est inchangé par les transformations de type b) ou c). Une application des transformations de type a), b) ou c) ne peut donc modifier la parité du nombre des facteurs; le théorème de Moore montre alors qu'un produit d'un nombre pair de π_i ne peut être égal à un produit d'un nombre impair de tels facteurs, donc qu'une permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

3. *Nombre d'inversions d'une permutation.*

La démonstration du théorème de Moore est un peu délicate pour avoir sa place dans un cours élémentaire. L'intérêt de ce théorème est ailleurs; il n'est en effet que le prototype de résultats s'appliquant à une vaste classe de groupes, les groupes de Coxeter, dont on rencontre de nombreuses applications géométriques. On peut consulter à ce sujet les monographies de Coxeter et Moser [5] et de Bourbaki [2].

Les méthodes que nous allons maintenant examiner ont toutes un point commun. Par un procédé ou un autre, on associe à toute permutation s un nombre $\alpha(s)$ égal à 1 ou -1 de telle sorte que l'on ait la relation

$$\alpha(st) = \alpha(s)\,\alpha(t) \tag{5}$$

pour deux permutations s et t. Il suffit alors de prouver que $\alpha(s)$ est égal à -1 pour une transposition s, ou même simplement de prouver la formule $\alpha(\pi_i) = -1$ pour $1 \leqq i < n$; on en déduit en effet que $\alpha(s)$ est égal à 1 pour les permutations paires et à -1 pour les permutations impaires. On a ainsi distingué entre les deux espèces de permutations et indiqué un procédé de construction de la signature.

Un premier groupe de méthodes tourne autour de l'idée d'*inversion* d'une permutation. Rappelons quelques définitions: si $x_1, \ldots, x_n$ est une suite de n nombres réels distincts, une inversion de la suite est un couple extrait de la suite en question qui se trouve dérangé de l'ordre usuel; autrement dit, c'est un couple $x_i x_j$ avec $i < j$ et $x_i > x_j$. Ainsi, dans la suite 6 3 1 2 4 5, les inversions sont les couples

$$6\,3\,,\ 6\,1\,,\ 6\,2\,,\ 6\,4\,,\ 6\,5\,,\ 3\,1\,,\ 3\,2\,.$$

Si s est une permutation, on note $N(s)$ le nombre d'inversions de la suite $s(1), \ldots, s(n)$; dans ce n°, on pose $\alpha(s) = (-1)^{N(s)}$.

A) La méthode la plus classique consiste à comparer $N(s)$ et $N(t)$ pour $t = s\pi_i$. La suite $t(1), \ldots, t(n)$ ne diffère de la suite $s(1), \ldots, s(n)$ que par l'échange des termes de rang i et $i+1$. Les couples que l'on peut extraire de la suite $t(1), \ldots, t(n)$ sont donc les mêmes que ceux que l'on peut extraire de la suite $s(1), \ldots, s(n)$, à l'exception de $s(i),s(i+1)$ qui est remplacé par $s(i+1),s(i)$. En passant de s à t, le nombre d'inversions est augmenté ou diminué d'une unité selon que l'on a $s(i) < s(i+1)$ ou $s(i) > s(i+1)$. En tout cas, on a $\alpha(s\pi_i) = -\alpha(s)$. Comme le nombre d'inversions de la permutation identique ε est nul, on en déduit par récurrence sur k la formule $\alpha(s) = (-1)^k$ si s est produit de k générateurs π_i. Par suite, $\alpha(s)$ vaut 1 pour les permutations paires et -1 pour les permutations impaires [1].

B) On peut aussi considérer des fonctions de n variables $f(x_1, \ldots, x_n)$; la nature de ces variables est indifférente, il peut s'agir de nombres entiers, réels ou complexes, et l'on peut aussi considérer des polynômes formels à n indéterminées. Une permutation s de rang n transforme f en une nouvelle fonction sf par la règle

$$(sf)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)}) . \tag{6}$$

La suite du raisonnement repose sur la formule

$$(st)f = s(tf) \tag{7}$$

où s et t sont deux permutations de rang n et f une fonction de n variables.

On introduit ensuite une fonction particulière D définie par

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k<l} (x_k - x_l) \tag{8}$$

Pour passer de D à $\pi_i D$, il faut échanger x_i et x_{i+1} donc, remplacer $x_i - x_{i+1}$ par $x_{i+1} - x_i$, échanger les facteurs de la forme $x_k - x_i$ et $x_k - x_{i+1}$ pour $1 \leqq k < i$, et échanger les facteurs de la forme $x_i - x_l$ et $x_{i+1} - x_l$ pour $i+1 < l$; au total, on a $\pi_i D = -D$. Si s est le produit de k générateurs π_i, la formule (7) montre alors que l'on a $sD = (-1)^k D$; autrement dit, on a $sD = D$ si s est paire et $sD = -D$ si s est impaire. Comme la fonction D n'est pas identiquement nulle, une même permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

Le raisonnement précédent a été présenté sans faire jouer de rôle explicite aux inversions. En fait, par un argument du même type, mais un

---

[1]) Une variante consiste à comparer $N(s)$ et $N(ss_{ij})$ pour une transposition s_{ij} quelconque. Le principe est analogue, mais l'énumération des inversions de ss_{ij} est un peu plus compliquée.

peu plus délicat, on montre que dans le passage de D à sD, il y a permutation des facteurs et $N(s)$ changements de signe, d'où $sD = (-1)^{N(s)}D$.

C) Dans la méthode précédente, tant les variables $x_1, ..., x_n$ que les fonctions f jouent un rôle assez fictif. On peut en présenter une variante plus « économique » de la manière suivante. A chaque permutation s de rang n, on associe l'entier $\Pi(s) = \prod_{i<j} (s(j)-s(i))$. On remarque ensuite que, la permutation s étant fixée, toute partie à deux éléments de l'ensemble $X = \{1, 2, ..., n\}$ se représente de manière unique sous la forme $\{s(i),s(j)\}$ avec $i < j$; de plus, $|k-l|$ ne dépend évidemment que de la *partie* $\{k,l\}$. Par suite $|\Pi(s)| = \prod_{i<j} |s(i)-s(j)|$ est égal à $\prod_{\{k,l\}} |k-l| = \prod_{k<l} (l-k) = D$. De plus, dans le produit définissant $\Pi(s)$, les facteurs négatifs correspondent exactement aux inversions de la suite $s(1), ..., s(n)$. On en conclut

$$\Pi(s) = \alpha(s) \cdot D . \tag{9}$$

On considère ensuite deux permutations s et t. Dans le produit

$$\frac{\Pi(st)}{\Pi(t)} = \prod_{i<j} \frac{s(t(j)) - s(t(i))}{t(j) - t(i)},$$

chaque facteur est invariant par l'échange de i et j, et ne dépend donc que de la *partie* $\{t(i),t(j)\}$. On a donc

$$\frac{\Pi(st)}{\Pi(t)} = \prod_{\{k,l\}} \frac{s(l) - s(k)}{l - k} = \prod_{k<l} \frac{s(l) - s(k)}{l - k} = \frac{\Pi(s)}{D} = \alpha(s),$$

c'est-à-dire

$$\Pi(st) = \alpha(s)\,\Pi(t). \tag{10}$$

De (9) et (10), on déduit $\alpha(st).D = \Pi(st) = \alpha(s).\Pi(t) = \alpha(s)\alpha(t).D$, d'où $\alpha(st) = \alpha(s)\alpha(t)$ puisque D est non nul. On prouve ensuite que le nombre d'inversions de π_i est égal à 1, d'où $\alpha(\pi_i) = -1$. Comme on l'a déjà remarqué, cela suffit à montrer qu'une permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

4. *Permutations et graphes.*

Comme J. L. Koszul me l'a fait plusieurs fois remarquer, l'inconvénient de la définition de la signature au moyen du nombre d'inversions est de dépendre étroitement de la relation d'ordre entre entiers; de même, les transpositions π_i de deux entiers consécutifs jouent un rôle privilégié dans les