3. Définitions,

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ceci provient simplement de ce qu'un groupe linéaire irréductible ne peut pas laisser invariantes deux formes quadratiques définies positives non proportionnelles; pour le voir, réduire l'une de ces formes par rapport à l'autre.

Par exemple (2.6.2) nous tranquillise, lorsque nous pensions à écrire les sphères, les projectifs comme espaces homogènes: $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, $P^n(\mathbf{C}) = U(n+1)/U(n)\times U(1)$, $P^n(\mathbf{H}) = Sp(n+1)/Sp(n)\times Sp(1)$. Comme les groupes d'isotropie H agissent dans tous ces cas de façon irréductible, on n'obtient pas, par cette méthode, d'autres s.r. que celles de (2.3.1), (2.5.1), 2.5.2.) (à un scalaire près).

(2.7): *le plan projectif des octaves de Cayley* $(P^2(\mathbf{Ca}), g_0)$.

L'espace $P^2(\mathbf{Ca})$, peut être défini comme l'espace homogène $F_4/\mathrm{Spin}\,(9)$ (voir [8]); Spin (9) agit de façon irréductible d'où, sur $P^2(\mathbf{Ca})$ une s.r. canonique (on prendra celle normée en sorte que toutes les géodésiques soient de longueur π, voir (9.8)): $(P^2(\mathbf{Ca}), g_0)$.

Nous poserons, pour tout n:

(2.8): $P_o^n = S^n, P_1^n = P^n(\mathbf{R}), P_2^n = P^n(\mathbf{C}), P_4^n = P^n(\mathbf{H}), P_8^2 = P^2(\mathbf{Ca})$;

Ainsi que $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$ et $i = dim_{\mathbf{R}} K$. Noter que $dim_{\mathbf{R}} P_1^n = i\,.\,n$. On aura donc les submersions riemanniennes:

(2.9): $(S^{in+i-1}, g_0) \xrightarrow{P} (P_i^n, g_0), \qquad i = 1, 2, 4.$

On rappelle les difféomorphismes entre P_i^1 et S^i $(i=1, 2, 4, 8)$. En fait on a même des isométries entre

(2.10): (P_i^1, g_0) et $(S^i, \frac{1}{4}g_0), \qquad i = 1, 2, 4, 8.$

Enfin, en tant qu'espaces homogènes, les P_i^n se caractérisent comme étant exactement l'ensemble des espaces symétriques de rang égal à 1: [11], p. 354 et ii. Ces (P_i^n, g_0) vont servir de modèles à une grande partie de ce qui suit.

Volumes, Surfaces, Longueur

3. *Définitions.*

Le fait simple et fondamental est:

(3.1): *une* v.r. $(,M\,\mathrm{g})$ *admet une mesure canonique*, v_g.

Heuristiquement, ceci vient de ce qu'un espace euclidien admet une mesure canonique (la mesure de Lebesgue pour $\mathbf{R}^n$), et comme (M, g) est

partout infinitésimalement un espace euclidien, on a gagné. Plus précisément: pour un espace vectoriel euclidien, on prend une orientation quelconque et soit n la dimension de cet espace E; il existe alors sur E une n-forme alternée canonique, ω; elle vaut $\omega(e_1, ..., e_n) = 1$ sur toute base orthonormée directe $\{e_i\}$ de E (ce qui a un sens parce que le déterminant d'une rotation est égal à 1). On peut aussi trouver ω en remarquant que $\overset{n}{\wedge} E$, d'une part est euclidien, d'autre part est de dimension un, donc possède un vecteur unique de norme un correspondant à l'orientation choisie pour E; c'est ω. Soit (M, g) une variété riemannienne, U un ouvert domaine d'une carte; fixons une orientation sur U. D'après ce qui précède il existe sur U une n-forme canonique ($n = dim\ M$) $m \mapsto \omega_m$. Pour $f : M \to \mathbf{R}$ à support dans U on pose $\int_M f v_g = \int_U f\omega$, au sens de l'intégrale sur une variété orientée d'une forme alternée de degré maximum. Il n'y a plus qu'à remarquer que la valeur $\int_U f\omega$ ne change pas si l'on change l'orientation de U, puis que v_g se définit pour des fonctions à support compact quelconque à l'aide de partitions de l'unité.

(3.2): *soit* (M, g) *une* v.r. *compacte. Le* volume *de* (M, g) *est* vol (M, g) $= \int_M v_g$, *c'est-à-dire la masse totale de* (M, g) *pour sa mesure canonique; si* dim M = 1, *on dit* longueur *et écrit* long (M, g), *si* dim M = 2, *on dit* surface *et écrit* surf (M, g).

On peut calculer explicitement vol (P_i^n, g_0) pour tous n, i: voir le tableau. Pour S^n, c'est un vieux résultat. On passe de là à P_1^n, revêtu à deux feuillets par S^n, en divisant par deux.

Par trivialisation locale et le théorème de Fubini on voit que:

(3.3): *soit* (M, g) $\xrightarrow{p}$ (N, h) *une submersion riemannienne, qui est une fibration et supposons* M compacte. *Alors*

$$\mathrm{vol}\,(M, g) = \int_{n \in N} \mathrm{vol}\,(p^{-1}(n), g)\,.\,v_h.$$

Appliquons ceci à P_2^n (resp. P_4^n), pour g_0 bien sûr. Les fibres sont des grands cercles (resp. des sous-sphères de dimension trois) de S^{2n+1} (resp. S^{4n+3}), fibres ayant toutes même longueur (resp. volume) égale à 2π (resp. égal à $2\pi^2$, voir tableau). D'où les valeurs de la première ligne du tableau.

Pour (P_8^2, g_0), il faut employer d'autres méthodes; on en trouvera une dans [1], p. 209.

Si $N \subset M$ est une sous-variété de (M, g), on posera (voir (2.3)):

(3.4) $\quad \mathrm{vol}\,(N, g) = \mathrm{vol}\,(N, g|_N).$

Soit $c : [a, b] \to M$ une courbe d'une v.r. (M, g); même si $c([a, b])$ n'est pas une sous-variété de M on peut définir la longueur de c par:

$$\textbf{(3.5)} \qquad \operatorname{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

Exemple : soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne; une courbe c de M sera dite *horizontale* si $c'(t) \in H_{c(t)}$ pour tout t. Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit:

(3.6): $\operatorname{long}(p \circ c, h) \leqq \operatorname{long}(c, g)$; en outre $\operatorname{long}(p \circ c, h) = \operatorname{long}(c, g)$ si et seulement si c est horizontale.

4. *Le théorème de Pu.*

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit g une s.r. sur P_1^2, le plan projectif réel. A (P_1^2, g) on peut attacher deux nombres réels, son volume $\operatorname{vol}(P_1^2, g)$ et son *carcan*, $\operatorname{carc}(P_1^2, g)$, égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de P_1^2 non homotopes à zéro:

$$\textbf{(4.1)} \qquad \operatorname{carc}(P_1^2, g) = \inf_{c \text{non} \sim_0} \operatorname{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si $\operatorname{carc}(P_1^2, g) \geqq k$, alors $\operatorname{surf}(P_1^2, g)$ est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de k. Définissons le *quotient* de (P_1^2, g) comme le rapport homogène de degré zéro:

$$\textbf{(4.2)} \qquad \operatorname{quot}(P_1^2, g) = \frac{\operatorname{surf}(P_1^2, g)}{(\operatorname{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer $\operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$. Le tableau donne le numérateur; pour $\operatorname{carc}(P_1^2, g_0)$, on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de (P_1^2, g_0) soient les droites projectives!). Donc $\operatorname{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$ (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le:

(4.3): *théorème* (Pu, [14]). *Quel que soit la* s.r. g *sur* P_1^2, *on a* $\operatorname{quot}(P_1^2, g) \geqq \operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$. *En outre, si* $\operatorname{quot}(P_1^2, g) = \operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$, *alors* (P_1^2, g) et (P_1^2, g_0) *sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4)) $(S^2, \tilde{g})$ de (P_1^2, g). D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à (S^2, g), il existe