Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: 6. Le cas kählérien.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43854

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(5.2) $\operatorname{carc}(P_i^n, g) = \inf_{Y \sim P_i^p} \operatorname{vol}(Y, g)$, $\operatorname{quot}(P_i^n, g) = \dfrac{\operatorname{vol}(P_i^n, g)}{(\operatorname{carc}(P_i^n, g))^n}$.

La question qui se pose d'abord est le calcul des $\operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$; pour $i = 1$, c'est fait. Pour $i = 2, 4, 8$, voir le n° 6. Ensuite, introduisons les assertions:

(5.3) « I $(n;i)$ »: $\forall\, g$: $\operatorname{quot}(P_i^n, g) \geqq \operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$;

(5.4) « $IC(n;i)$ »: « $I(n;i)$ » et « $\operatorname{quot}(P_i^n, g) = \operatorname{quot}(P_i^n, g_0)$ entraîne (P_i^n, g) et (P_i^n, g_0) sont isométriques »;

(5.5) « $P(n;i)$ »: $\exists\, k > 0$ telle que $\forall\, g$: $\operatorname{quot}(P_i^n, g) \geqq k$.

Voir le tableau, page 85.

6. *Le cas kählérien.*

Soit (M, g) une variété *hermitienne*, c'est-à-dire que M possède une structure analytique complexe, dont on notera J la multiplication par $(-1)^{1/2}$ sur le fibré réel TM, et que g commute avec J : $\forall\, x, y$: $g(J(x), J(y)) = g(x, y)$. On en déduit sur M une forme alternée de degré deux ω, par

(6.1) $\forall\, x, y : \omega(x, y) = g(x, J(y))$.

L'inégalité de Wirtinger ([7], p. 40) entraîne que si Y est une sous-variété compacte de dimension deux de M, alors

(6.2): $\operatorname{vol}(Y, g) \geqq \int_Y \omega_Y$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* Y *est une sous-variété analytique complexe.*

Supposons de plus (M, g) kählérienne, c'est-à-dire $d\omega = 0$ (on appelle ω la forme de Kähler de (M, g)). Si Y et Z sont homotopes:

(6.3) $\int_Y \omega|_Y = \int_Z \omega|_Z$

d'après la formule de Stokes.

Maintenant, (P_2^n, g_0) est kählérienne, pour la structure complexe canonique du projectif complexe $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$. D'après (6.2) et (6.3), quel que soit $Y \sim P_2^1$ et parce que $P_2^1 \subset P_2^n$ est une sous-variété analytique complexe, on a pour la forme de Kähler ω_0 de (P_2^n, g_0):

$$\operatorname{vol}(Y, g_0) \geqq \int_Y \omega_0|_Y = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \operatorname{vol}(P_2^1, g_0).$$

Ce qui démontre (voir (2.10)) que carc $(P_2^n, g_0) = \pi$, puis quot $(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant g une s.r. kählérienne sur P_2^n telle que la forme de Kâhler associée ω vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle α de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f : M \to \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2}\delta\bar{\delta}f$; définir g par (6.1) à partir de ω. Pour f assez petite, g est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \overset{n}{\wedge} \omega$, où n est la dimension complexe. On aura donc:

$$\mathrm{vol}\,(P_2^n, g) = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge} \omega = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge} \omega_0 = \mathrm{vol}\,(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\mathrm{vol}\,(Y, g) \geqq \int_Y \omega|_Y = \int_{P_2^1} \omega|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \mathrm{carc}\,(P_2^n, g_0)$$

donc carc $(P_2^n, g) =$ carc (P_2^n, g_0). D'où quot $(P_2^n, g) =$ quot (P_2^n, g_0) pour toute g du type précédent; or en général (P_2^n, g) et (P_2^n, g_0) ne seront pas isométriques; ainsi « $IC\,(n;2)$ » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer quot (P_4^n, g_0) (resp. quot (P_8^2, g_0)). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de P_4^n (resp. P_8^2); on aura carc $(P_4^n, g_0) =$ vol $(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où quot (P_4^n, g_0) (voir tableau). De même: carc $(P_8^2, g_0) =$ vol $(P_8^1, g_0) =$ $=$ vol $(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3.$ (d'après (2.10)); d'où quot (P_8^2, g_0) (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « $IC\,(n;4)$ » ou « $IC\,(2;8)$ ».

7. *Théorèmes de Loewner, Blatter.*

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan carc (M, g) de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

$$\textbf{(7.1)} \qquad \mathrm{quot}\,(M, g) = \frac{\mathrm{vol}\,(M, g)}{(\mathrm{carc}\,(M, g))^n}, \; \mathrm{n} = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute* g: quot $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, g) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$; *en outre* quot $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \mathrm{g}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *si et seulement si* $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \mathrm{g})$ *est isométrique à un tore équilatéral* (voir (2.4.2)).