7. Théorèmes de Loewner, Blatter.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ce qui démontre (voir (2.10)) que carc $(P_2^n, g_0) = \pi$, puis quot $(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant g une s.r. kählérienne sur P_2^n telle que la forme de Kâhler associée ω vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle α de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f : M \to \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2}\delta\bar{\delta}f$; définir g par (6.1) à partir de ω. Pour f assez petite, g est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \overset{n}{\wedge} \omega$, où n est la dimension complexe. On aura donc:

$$\mathrm{vol}\,(P_2^n, g) = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge} \omega = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge} \omega_0 = \mathrm{vol}\,(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\mathrm{vol}\,(Y, g) \geqq \int_Y \omega|_Y = \int_{P_2^1} \omega|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \mathrm{carc}\,(P_2^n, g_0)$$

donc carc $(P_2^n, g) =$ carc (P_2^n, g_0). D'où quot $(P_2^n, g) =$ quot (P_2^n, g_0) pour toute g du type précédent; or en général (P_2^n, g) et (P_2^n, g_0) ne seront pas isométriques; ainsi « $IC\,(n;2)$ » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer quot (P_4^n, g_0) (resp. quot (P_8^2, g_0)). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de P_4^n (resp. P_8^2); on aura carc $(P_4^n, g_0) =$ vol $(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où quot (P_4^n, g_0) (voir tableau). De même: carc $(P_8^2, g_0) =$ vol $(P_8^1, g_0) =$ $=$ vol $(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3.$ (d'après (2.10)); d'où quot (P_8^2, g_0) (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « $IC\,(n;4)$ » ou « $IC\,(2;8)$ ».

7. *Théorèmes de Loewner, Blatter.*

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan carc (M, g) de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

$$\textbf{(7.1)} \qquad \mathrm{quot}\,(M, g) = \frac{\mathrm{vol}\,(M, g)}{(\mathrm{carc}\,(M, g))^n}, \; \mathrm{n} = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute* g: quot $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, g) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$; *en outre* quot $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \mathrm{g}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *si et seulement si* $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \mathrm{g})$ *est isométrique à un tore équilatéral* (voir (2.4.2)).

TABLEAU

(on a posé $p) = (2p-1) . (2p-3) \ldots\ldots 3.1)$

	$S^n = P^n_o$	P^2_1	$P^n_1 = P^n(\mathbf{R})\ (n \geqslant 3)$	P^n_2	P^n_4	P^2_8
vol $(P:; g_0)$	$n = 2p$: $2 . \frac{(2\pi)^p}{p)}$ $n = 2p + 1$: $2 \frac{\pi^{p+1}}{p!}$	2π	$n = 2p$: $\frac{(2\pi)^p}{p)}$ $n = 2p + 1$: $\frac{\pi^{p+1}}{p!}$ –	$\frac{\pi^n}{n!}$	$\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$	$\frac{\pi^8}{11.10.9.8.7.6.5.4}$
quot $(P:, g_0)$		$\frac{2}{\pi}$	$n = 2p$: $\frac{2^p}{p)}$ $n = 2p + 1$: $\frac{\pi}{p!}$	$\frac{1}{n!}$	$\frac{6^n}{(2n+1)!}$	$\frac{7}{11}$
« $I(. ; .)$ »		vraie	ouverte	ouverte	ouverte	ouverte
« $IC(. ; .)$ »		vraie	ouverte	fausse	ouverte	ouverte
« $P(. ; .)$ »		vraie	ouverte	ouverte	ouverte	ouverte

La démonstration démarre comme celle de (4.2), sauf qu'il n'y a même pas à prendre de revêtement. On aboutit à quot $(S^1 \times S^1, g) \geqq$ quot $(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$, quotient d'un tore plat associé au réseau G de $\mathbf{R}^2$. Il reste ensuite le problème de géométrie élémentaire: étudier les quotients des tores plats.

Soit G_q *la* surface compacte orientable à q trous (ou surface orientable de genre q, toutes ces surfaces sont difféomorphes à G_q).

(7.3): *théorème* (Blatter, [3]). *Pour tout* q *quelle que soit la* s.r. *sur* G_q: quot $(G_q, g) \geqq (t_{2q})^{1/q}$ (*où les* t_n *sont ceux définis par* (7.4)).

La démonstration diffère radicalement de celles de (4.2) et (7.2); elle repose sur l'emploi des formes harmoniques; et l'on intègre sur leurs courbes de niveau.

Pour $q \geqq 2$, la situation diffère de celle de (7.2); les b_q sont bien les meilleures possibles: $b_q = \inf_{g \text{ s.r. sur } G_q}$ quot (G_q, g), mais cette borne n'est jamais atteinte si $q \geqq 2$ ([1], p. 309).

Une bonne généralisation naturelle est de se demander si

$$\textbf{(7.4)} \qquad \forall g\text{: quot } ((S^1)^n, g) \geqq \inf_{G \text{ réseau de } \mathbf{R}^n} \text{quot } (\mathbf{R}^n/G, g_0/G) = t_n.$$

Non seulement cette question est ouverte, mais en outre les nombres arithmétiques t_n ne sont pas connus, sauf pour $2 \leqq n \leqq 8$ (voir [5], p. 332). On sait aussi que $t_n > 0$ et est réalisée effectivement:
[5], corollary, p. 143. Enfin que t_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini: [5], p. 247.

Enfin, on voit bien quel est le problème type dont ceux qui précèdent ne sont que des cas particuliers; soit M une variété C^∞ compacte et α, β, ... différentes classes d'homologie, d'homotopie (libre) de M. Pour toute telle classe on définit, pour toute s.r. g sur M:

$$\textbf{(7.5)} \qquad \alpha(g) = \inf_{Y \in \alpha} \text{vol}(Y, g)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les sous-variétés Y de M qui appartiennent à la classe α considérée. Remarquons en passant que l'on ne se préoccupe pas de la réalisation de $\alpha(g)$ par une sous-variété Y; mais ce n'est pas par manque d'intérêt! Le problème général est: existe-t-il, sur certaines variétés, des relations entre $\alpha(g)$, $\beta(g)$, ..., indépendantes de la s.r. g sur M? Le théorème de Pu est relatif au cas où α est la classe fondamentale (de dimension deux) de $P_1^2 = M$ et β la classe des droites projectives; on a $\alpha(g) \geqq \frac{2}{\pi}(\beta(g))^2$ pour toute g. Le théorème de Loewner montre, en

tout cas, que si M, N sont deux variétés compactes, et si α (resp. β) est la classe d'homotopie de $M \times N$ qui représente M (resp. N), alors on n'a pas en général: $\mathrm{vol}\,(M \times N, g) \geqq \alpha\,(g)\,.\,\beta\,(g)$ pour toute g. Voir aussi [11′].

Géodésiques.

8. *Définition.*

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r. (M, g) posons, pour deux points $m, n \in M$:

(8.1) $\quad d\,(m, n) = \inf_c \mathrm{long}\,(c, g)$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités m, n).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que d est une distance sur M; ainsi (M, g) est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de M coincide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de (M, g) sont les courbes de classe C^1 qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e. $c : I \to M$ (I intervalle de $\mathbf{R}$) est une géodésique si $|c'|$ est constante et si $\forall\, t \in I\ \exists\, t' > t$, $t' \in I$, tel que $\mathrm{long}\,(c|_{[t,t']}, g) = d\,(c\,(t), c\,(t'))$.

Pour $(\mathbf{R}^n, g_0)$ les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, ce sont les courbes dont l'accélération est normale à S.

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si (M, g) est complète:

(8.2) $\forall\, m, n \in M\ \exists\, c$, courbe d'extrémités m, n, telle que $\mathrm{long}\,(c, g) = d\,(m, n)$;

(8.3) $\forall\, x \in TM$ il existe une géodésique unique c: $\mathbf{R} \to M$ telle que $c'\,(0) = x$.

Remarques :

(8.4): la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur (S^n, g_0) deux points m, n antipodes. Par contre on démontre