Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: 10. Géodésiques périodiques.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43854

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

dans [4], p. 466, le fait que le comportement des géodésiques de (P_8^2, g_0) est exactement le même que celui décrit précédemment pour les géodésiques des (P_i^n, g_0) $(i=1, 2, 4)$, en prenant $K = \mathbf{Ca}$ et $i = 8$.

10. *Géodésiques périodiques.*

(10.1): *définition : une géodésique* c : [a, b] → (M, g) *est dite* périodique *(ou* fermée*) si* c *est non constante et si* c′ (a) = c′ (b). *Elle est dite en outre* simple *si* $c|_{[a,b[}$ *est injective.*

Le mot périodique est justifié parce que (8.3) montre que c se prolonge en une géodésique $\bar{c} : \mathbf{R} \to M$ telle que $\bar{c}|_{[a,b]} = c$ et $c(t+b-a) = c(t)$ pour tout t. La figure 1 ne représente pas une géodésique périodique (mais seulement un lacet géodésique), la figure 2 représente une géodésique

périodique non simple, la figure 3 représente une géodésique périodique simple:

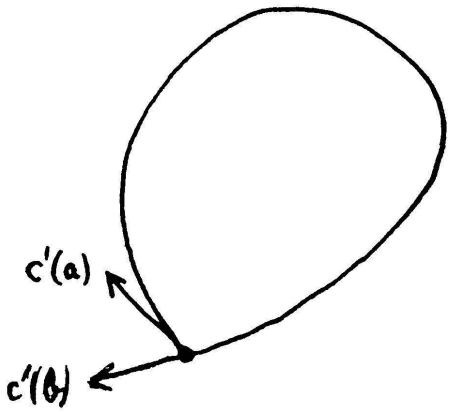

Fig. 1

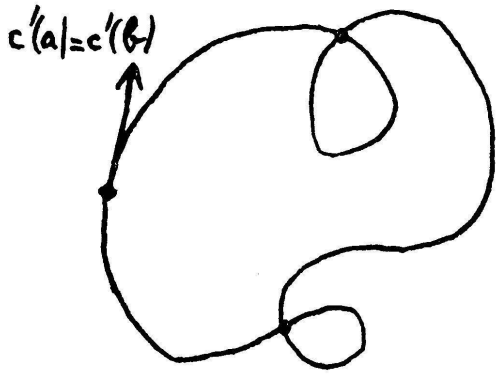

Fig. 2

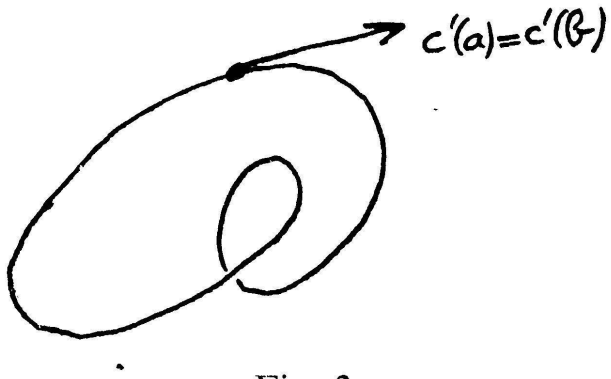

Fig. 3

Pour une v.r. (M, g) on introduit les trois assertions:

(10.2): « *GPS* (m) »: $\forall\, x \in T_mM$, $x \neq 0$, la géodésique c telle que $c'(0) = x$ est périodique, simple et de longueur π;

(10.3): « GPS »: $\exists\, m \in M$ tel que « *GPS* (m) »;

(10.4): « *TGPS* »: $\forall\, m \in M$ on a « *GPS* (m) ».

Exemple: les $(S^n, \frac{1}{2}g_0)$ et les (P^n_i, g_0) $(i=1, 2, 4, 8)$ vérifient « *TGPS* ».

Ce qui précède conduit naturellement à deux types de problèmes: (i): dans quelle mesure « *GPS* » ou « *TGPS* » caractérisent-elles les (P^n_i, g_0)? (ii): existence d'une ou plusieurs géodésiques périodiques, voire une infinité, sur une v.r.

11. *Variétés telles que « GPS ».*

On peut seulement espérer au plus que « *GPS* » caractérisent les variétés différentiables P^n_i. En effet, soit m le pôle nord de S^n et G son groupe d'isotropie, c'est-à-dire $G = \{s \in S0\,(n+1) : s\,(m) = m\}$ (G est canoniquement isomorphe à $S0\,(n)$). Alors, pour n'importe quelle s.r. sur S^n qui est invariante par G (i.e. toutes les actions de G sont des isométries), on a « *GPS* (m) » (laissé au lecteur en exercice: les géodésiques issues de m sont les méridiens). Et, bien sûr, de telles s.r. n'ont aucune raison d'être isométriques à g_0.

Actuellement, d'une part on ne connait pas d'autres variétés que les P^n_i à posséder une s.r. telle que « *GPS* ». D'autre part, on a le résultat suivant, dans lequel $H^*\,(.\,;\mathbf{Z})$ représente l'anneau de cohomologie entière:
(11.1): *théorème* (Bott: [2], Samelson: [15]): *soit* (M, g) *telle que* « GPS ». *Alors* $\exists$ n *et* $\exists$ i *tels que* $\mathrm{H}^*\,(\mathrm{M};\mathbf{Z})$ *soit isomorphe en tant qu'anneau à* $\mathrm{H}^*\,(\mathrm{P}^n_i;\mathbf{Z})$.

Il faut remarquer qu'il existe ([6]) des variétés M, non homéomorphes à P^2_4, mais cependant telles que $H^*\,(M;\mathbf{Z})$ et $H^*\,(P^2_4;\mathbf{Z})$ soient isomorphes en tant qu'anneaux. C'est pourquoi il faudrait décider si, oui ou non, il existe sur une de ces M, une s.r. telle que « *GPS* ».

La démonstration complète de (11.1) est colossale. Le point de départ est la théorie de Morse usuelle. La condition « *GPS* » assure ceci: il existe une filtration convenable de $\Omega \cdot (M)$, l'espace des lacets à point base de M, par des sous-espaces $\Omega^i_h\,(M)$, filtration telle que les nombres de Betti relatifs $b_k\,(\Omega^i_{h+1}(M), \Omega^i_h(M))$ soient tous nuls sauf un précis, qui est en plus égal à un. La suite spectrale de cette filtration permet alors de déterminer exactement $H^*\,(\Omega \cdot (M);\mathbf{Z})$ (à l'aide d'un seul entier encore inconnu i). De $H^*\,(\Omega \cdot (M);\mathbf{Z})$ on passe, par la suite spectrale de la fibration de Serre, à $H^*\,(M;\mathbf{Z})$, dont on montre que c'est un anneau de polynômes tronquée, le générateur est de degré i. Un résultat très profond de topologie algébrique assure que ceci ne peut se produire que pour $i + 0, 1, 2, 4$ et n quelconque ou si $i = 8$ pour $n = 1, 2$ (où $\dim M = ni$). C.Q.F.D.