Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS DE QUELQUES TRAVAUX MATHÉMATIQUES RÉCENTS
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: Chapitre III
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44571

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

tion de l'idée de « Loi », fait intervenir la notion de correspondance établie physiquement, peut donc avoir une tout autre portée que le calcul des fonctions analytiques de Lagrange. Et quand même ces deux calculs auraient la même portée, il y aurait entre eux une différence analogue à celle qui distingue les deux modes d'exposition de la théorie des fonctions de variable complexe faite, soit d'après les vues de Riemann, soit d'après celles de Weierstrass et de M. Méray.

Chapitre III

En définissant les fonctions par l'idée de correspondance et non à l'aide d'expressions analytiques, Newton accomplissait un grand progrès mais en pratique, comme Leibnitz et tous ses contemporains, il ne s'occupe que des fonctions ayant une expression analytique simple. On ne conçoit guère d'ailleurs comment il aurait pu en être autrement. Newton réussissait à résumer tous les phénomènes astronomiques dans une seule loi et cette loi, malgré sa généralité, s'exprimait aussi simplement que possible à l'aide des symboles algébriques; un tel succès faisait naturellement penser qu'il était inutile de recourir à des fonctions compliquées pour l'explication des phénomènes naturels et en tous cas on était assuré qu'il y avait encore beaucoup à tirer de l'emploi des expressions analytiques simples.

Si la rigueur avait été de mode à cette époque comme de nos jours, la question de la possibilité d'exprimer analytiquement les fonctions définies physiquement se serait posée à chaque instant. Il était impossible, par exemple, de résoudre le problème de la brachystochrone sans supposer que la courbe à trouver existait et possédait certains éléments, tangente, rayon de courbure, etc., dont on savait démontrer l'existence pour les courbes à définition analytique, mais pour ces courbes seules.

Fort heureusement, les Bernouilli, Leibnitz, Newton, l'Hospital, ne se laissèrent pas arrêter par cette difficulté préjudicielle et il faut attendre jusqu'à D'Alembert et Lagrange pour que la question soit posée nettement à l'occasion du problème des cordes vibrantes [1]).

---

[1]) La discussion qui s'éleva à l'occasion de ce problème est intéressante à bien des égards. Cependant, comme les contradicteurs s'opposèrent pendant longtemps les mêmes arguments sans en apporter de nouveaux, la lecture des mémoires originaux est un peu fastidieuse. On aura une idée très suffisante de cette importante discussion, en lisant l'un des nombreux résumés qui en ont été faits, et en particulier celui qui constitue le premier paragraphe de l'historique que Riemann a mis au début de son célèbre mémoire sur les séries trigonométriques. Ce paragraphe est d'ailleurs presque tout entier emprunté au chapitre II de la première section du premier mémoire de Lagrange sur la propagation du son (Œuvres, tome 1er).

D'Alembert avait prouvé que le déplacement y, supposé perpendiculaire à la position d'équilibre de la corde, du point de cette corde dont la distance à l'origine, dans la position d'équilibre est x, vérifie à un instant quelconque t, la formule.

$$y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x),$$

α est un cœfficient connu, f est une fonction *impaire* de période $2\,l$, l est la longueur de la corde.

Ce résultat obtenu, D'Alembert avait recherché des expressions analytiques, définissant des fonctions ayant les propriétés ci-dessus indiquées.

Euler reprit aussitôt l'analyse de D'Alembert, mais il lui donna une tout autre portée. Pour lui, si la corde part du repos, f n'est assujettie qu'aux deux relations

$$f(z) + f(-z) = 0, \qquad f(z) = f(z + 2l).$$

De plus il n'y a pas lieu, suivant Euler, de chercher pour f une expression analytique car f est déterminée immédiatement par une construction géométrique, dès que l'on connaît la courbe plane, position initiale de la corde.

Ainsi D'Alembert trouva par une analyse nouvelle l'intégrale du problème des cordes vibrantes, mais ce fut Euler qui comprit le rôle que doivent jouer les conditions initiales dans la détermination de celle des solutions qui convient à chaque cas particulier.

D'Alembert contesta l'exactitude du résultat d'Euler. En réalité il n'oppose rien de solide au raisonnement si simple et si convaincant d'Euler, mais il lui semble que la construction indiquée ne donnera une intégrale de l'équation $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, dont dépend le problème des cordes vibrantes, que si elle conduit précisément à l'une de ces fonctions exprimables analytiquement qu'il s'était efforcé de déterminer. C'est que, comme je l'ai dit, les opérations du calcul infinitésimal n'étaient légitimées que pour les fonctions exprimables analytiquement; pour que la solution d'Euler puisse être considérée comme rigoureuse il aurait donc fallu qu'elle ne fasse intervenir que de telles fonctions. Or, elle faisait intervenir la fonction arbitraire attachée à la position initiale de la corde; rien ne prouvait que cette fonction possédait les dérivées nécessaires pour qu'elle fournisse une solution de l'équation considérée et même il était évident qu'elle ne les possédait pas dans les cas les plus simples: « La manière ordinaire, pour ne pas dire l'unique, de faire sortir une corde de son état de repos, c'est de la prendre par un de ses points et de la tendre en la tirant ce qui lui donne

la forme de deux lignes droites qui font un angle entre elles », [1]) et dans ce cas le procédé d'Euler donnait pour f une fonction n'ayant pas de dérivée seconde pour certaines valeurs de la variable, par exemple pour O. De sorte que, pour chaque valeur de t, il existait des valeurs de x pour lesquelles $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ n'ayant pas de sens, ne satisfaisaient pas à

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

A cette objection, qui n'est comme on ne voit, que la constatation dans un cas très simple de l'existence de ces ondes de discontinuité qui se rencontrent constamment, ni Euler, ni Lagrange qui prétendit plus tard légitimer la construction d'Euler, ne purent répondre victorieusement. D'Alembert continua à réclamer pour sa solution la plus grande généralité possible et à déclarer, procédé toujours commode et toujours employé, que dans les cas qu'il n'envisageait pas « le problème surpassait les forces de l'analyse connue ».[2])

Il est inutile de parler ici de la méthode qu'employa Lagrange pour aborder le même problème, mais il est utile de dire pourquoi il regardait la méthode de D'Alembert comme tout aussi insuffisante que celle d'Euler. Lagrange fait à D'Alembert une objection analogue à celle que je faisais tout à l'heure à ceux qui s'occupaient de la brachystochrone; il lui reprochait d'admettre à priori que y était une expression analytique de x et de t. J'ai déjà dit que d'Alembert, tout en reconnaissant que le reproche était fondé, considérait qu'on ne pouvait guère faire mieux sans sortir du domaine des mathématiques.

Pour résumer, *à l'occasion de la manière ordinaire de faire sortir une corde de son état de repos*, nous voyons apparaître en mathématiques les courbes et fonctions arbitraires. La question de la légitimité des opérations ordinaires du calcul infinitésimal appliquées à ces fonctions se trouve alors posée et subsidiairement celle de la possibilité d'exprimer analytiquement de telles fonctions. Cette dernière question fût d'ailleurs posée d'une autre manière au cours de la discussion. Daniel Bernouilli, généralisant un résultat de Taylor, remarque que si l'on prenait

---

[1]) D'Alembert, Opuscules Mathématiques, Tome 1, page 41; voir aussi Tome IV, page 149.

[2]) Il semble bien, d'après certains passages de Lagrange et certaines lettres citées par D'Alembert, que les opinions primitives d'Euler et de Lagrange, sur la généralité de la solution possible, se modifièrent assez pour se rapprocher beaucoup à la fin de celles de D'Alembert.

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{\rho} \cos \frac{\pi \alpha}{\rho} t + a_2 \sin \frac{2\pi x}{\rho} \cos \frac{2\pi \alpha}{\rho} t + \ldots$$

on aurait une solution de l'équation des cordes vibrantes; et comme cette solution lui permettait de rendre compte de tous les phénomènes connus, il en concluait, suivant un procédé un peu rapide de raisonnement qu'on a souvent employé, que c'était la solution générale.

Euler protesta contre cette affirmation. Pour qu'elle soit exacte, il fallait qu'en faisant $t = 0$ dans y on eut l'équation de la courbe arbitraire position initiale de la corde; il aurait donc fallu que toute fonction arbitraire puisse s'exprimer par la formule

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{\rho} + a_2 \sin 2 \frac{\pi x}{\rho} + \ldots$$

c'est-à-dire en somme qu'il n'y ait pas de courbes arbitraires et qu'il n'y ait que des courbes géométriques.

Cela paraissait impossible, non seulement à Euler, mais encore à D'Alembert et Lagrange et même ils croyaient le prouver.

Admettant qu'on peut différencier terme à terme une série, ils en concluaient que la série indiquée ne pouvait pas représenter, par exemple, une position initiale polygonale de la corde.

Chapitre IV

Toutes les fonctions dont il a été question jusqu'ici sont des fonctions *continues*, au sens actuel du mot. C'est Fourier qui montra l'intérêt des fonctions *discontinues*.

Le premier des problèmes qui conduisit Fourier, dans sa théorie de la chaleur, à l'emploi des séries trigonométriques se ramène au suivant: les deux demi droites $y = \pm \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, sont maintenues à la température 0, la portion $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ de l'axe des y est maintenue à la température 1, étudier la distribution des températures stationnaires dans la portion du plan, supposé isotrope, limitées par les droites indiquées. Fourier montra que s'il est possible de déterminer les constantes a, b, c, etc., de manière que $V(x, y)$ se réduise à 1, quand on a $x = 0$, $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$, la température