Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS DE QUELQUES TRAVAUX MATHÉMATIQUES RÉCENTS
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: Chapitre VII
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44571

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2) Si l'on forme un ensemble par la réunion d'autres n'ayant pas de points communs, deux à deux, la mesure de l'ensemble somme est la somme des mesures; c'est-à-dire le caractère de nécessité qu'à la définition actuelle de la mesure.

Or, dans le cas des fonctions sommables quelconques l'intégrale est la mesure d'un ensemble de points attaché à la fonction et qui est la généralisation immédiate de l'ensemble des points du domaine dont il faut prendre l'aire pour avoir l'intégrale quand la fonction à intégrer est continue. Notons encore que, de ce point de vue géométrique, le cas particulier simple des fonctions intégrables au sens de Riemann se différencie nettement du cas général et que les intégrales par excès et par défaut de M. Darboux correspondent exactement aux étendues extérieures et intérieures, définies par MM. Jordan et Peano de l'ensemble associé à la fonction. J'ajoute que l'intégrale des fonctions sommables se construit à partir des mesures linéaires de certains ensembles comme l'intégrale des fonctions continues se construit à partir des longueurs des segments auxquels se réduisent ces ensembles dans ce cas particulier.

Chapitre VII

De ces travaux relatifs à la fois à l'intégration et aux notions de longueur d'aire et de volume, on peut rapprocher les recherches concernant les longueurs des courbes et les aires des surfaces. Les géomètres anciens prenaient les plus grandes précautions dans l'étude de ces longueurs et de ces aires; à vrai dire ils ne les définissaient pas, mais ils énonçaient avant les démonstrations toute une suite si précise d'axiomes et de principes que cela équivaut à la définition la plus minutieuse. C'est ainsi que M. Peano a pu rétablir les définitions adoptées par Archimède: la longueur (ou l'aire) d'une courbe (ou surface) convexe est la limite inférieure de la longueur (ou de l'aire) des lignes polygonales (ou surfaces polyédrales) circonscrites et la limite supérieure des inscrites. On avait perdu l'habitude de procéder avec précautions dans ces questions délicates surtout dans les livres d'enseignement, de sorte que, à l'époque où j'étais au collège, on démontrait victorieusement que $\pi = 2$.

Le procédé était des plus simples. La longueur de la circonférence de rayon R est $2\pi R$, π restant à déterminer. Ceci posé, soit une demi-circonférence de diamètre AB de centre O et de rayon R. Sa longueur πR est aussi celle de la courbe formée par les deux demi-circonférences de dia-

mètre $A\ O$ et $O\ B$. En opérant de même sur ces deux demi-circonférences on a quatre demi-circonférences de longueur totale πR, et ainsi de suite. Les courbes successives ainsi formées ont toutes pour longueur πR. Elles tendent manifestement vers $A\ B$ de longueur 2 R, donc $\pi = 2$.

Ce raisonnement, certes n'était pas rigoureux mais il l'était tout autant que ceux qu'on nous faisait pour obtenir la longueur de la circonférence, l'aire latérale du cône ou l'aire de la sphère, parce qu'on négligeait de définir ces longueurs et aires ou d'en énoncer les propriétés. Il nous était tout à fait impossible de voir en quoi notre raisonnement pêchait.

Il suffit d'ouvrir les ouvrages élémentaires tout récents pour voir les progrès qui ont été réalisés. Dans ces ouvrages, on définit d'une manière assez précise les longueurs ou les aires dont on parle, on démontre ou on affirme à leur sujet assez de propriétés, pour que les collégiens actuels ne s'étonnent pas que π diffère de 2. Et cela ne me paraît pas négligeable; s'il n'est pas nécessaire de soulever devant les élèves toutes les difficultés, s'il n'est pas nécessaire de leur tout prouver, il est indispensable de ne leur donner comme démonstration que de véritables raisonnements, modèles que les étudiants doivent pouvoir copier sans crainte.

Dans les raisonnements sur les longueurs et aires non définies, il fallait bien introduire subrepticement les définitions et propriétés qu'on n'énonçait pas, de sorte que l'on n'enseignait même pas de la logique formelle; mais ce qui est pis, c'est qu'on faisait raisonner les élèves sur des mots sans leur en faire analyser le contenu. On risquait de former ainsi des gens, raisonnant toujours logiquement ou à peu près, mais à partir de prémisses quelconques, choisies au hasard, sans aucun examen. On sait que ce défaut est fréquent chez ceux qui, s'occupant particulièrement de mathématiques, sont habitués à raisonner à partir de vérités à énoncés précis et rigoureux qu'ils n'ont pas besoin d'examiner à nouveau; mais s'il y a là une déformation de métier assez difficile à éviter, il faut du moins écarter tout ce qui tendrait à transmettre cette déformation à tous ceux qui reçoivent l'enseignement secondaire.

Chapitre VIII

Il importe d'abord de se rendre bien compte de ce que c'est qu'une courbe ou une surface.

On sait que Riemann, dans ses travaux sur les fondements de la géométrie, distingue tout d'abord le nombre de dimensions de l'espace dont il s'occupe. Ses considérations furent reconnues insuffisantes lorsque