Chapitre VIII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

mètre $A\ O$ et $O\ B$. En opérant de même sur ces deux demi-circonférences on a quatre demi-circonférences de longueur totale πR, et ainsi de suite. Les courbes successives ainsi formées ont toutes pour longueur πR. Elles tendent manifestement vers $A\ B$ de longueur 2 R, donc $\pi = 2$.

Ce raisonnement, certes n'était pas rigoureux mais il l'était tout autant que ceux qu'on nous faisait pour obtenir la longueur de la circonférence, l'aire latérale du cône ou l'aire de la sphère, parce qu'on négligeait de définir ces longueurs et aires ou d'en énoncer les propriétés. Il nous était tout à fait impossible de voir en quoi notre raisonnement pêchait.

Il suffit d'ouvrir les ouvrages élémentaires tout récents pour voir les progrès qui ont été réalisés. Dans ces ouvrages, on définit d'une manière assez précise les longueurs ou les aires dont on parle, on démontre ou on affirme à leur sujet assez de propriétés, pour que les collégiens actuels ne s'étonnent pas que π diffère de 2. Et cela ne me paraît pas négligeable; s'il n'est pas nécessaire de soulever devant les élèves toutes les difficultés, s'il n'est pas nécessaire de leur tout prouver, il est indispensable de ne leur donner comme démonstration que de véritables raisonnements, modèles que les étudiants doivent pouvoir copier sans crainte.

Dans les raisonnements sur les longueurs et aires non définies, il fallait bien introduire subrepticement les définitions et propriétés qu'on n'énonçait pas, de sorte que l'on n'enseignait même pas de la logique formelle; mais ce qui est pis, c'est qu'on faisait raisonner les élèves sur des mots sans leur en faire analyser le contenu. On risquait de former ainsi des gens, raisonnant toujours logiquement ou à peu près, mais à partir de prémisses quelconques, choisies au hasard, sans aucun examen. On sait que ce défaut est fréquent chez ceux qui, s'occupant particulièrement de mathématiques, sont habitués à raisonner à partir de vérités à énoncés précis et rigoureux qu'ils n'ont pas besoin d'examiner à nouveau; mais s'il y a là une déformation de métier assez difficile à éviter, il faut du moins écarter tout ce qui tendrait à transmettre cette déformation à tous ceux qui reçoivent l'enseignement secondaire.

Chapitre VIII

Il importe d'abord de se rendre bien compte de ce que c'est qu'une courbe ou une surface.

On sait que Riemann, dans ses travaux sur les fondements de la géométrie, distingue tout d'abord le nombre de dimensions de l'espace dont il s'occupe. Ses considérations furent reconnues insuffisantes lorsque

M. Cantor eut démontré qu'il y avait autant de points dans le plan que sur la droite; d'une façon plus précise qu'on pouvait établir une correspondance biunivoque entre les points de la droite et ceux du plan. Cependant, si l'on tient à respecter certaines continuités, on ne peut établir de correspondances biunivoques qu'entre les points de deux espaces ayant le même nombre de dimensions; cela permet de compléter les raisonnements de Riemann. C'est à ces recherches sur les correspondances entre espaces dont les nombres de dimensions sont différents que M. Peano a rattaché la construction de sa fameuse courbe passant par tous les points d'un carré ou d'un cube. Depuis, M. Hilbert et divers autres géomètres ont défini plus simplement des courbes jouissant de propriétés analogues; bien entendu, on peut définir également des surfaces ayant ces propriétés.

Dans ces travaux, une courbe ou une surface est définie en assujettissant x, y, z à être égales à des fonctions continues d'un ou de deux paramètres variables. C'est en partant de la même définition que M. Jordan a démontré que toute courbe plane fermée et sans point multiple divise le plan en deux régions. D'où la définition possible des domaines plans. M. Schönfliess a poursuivi l'étude des propriétés fondamentales de ces domaines dans toute une suite de mémoires qui tendent à donner une base solide aux considérations où intervient l'« analysis situs ».

On peut adopter pour les courbes et surfaces diverses autres définitions; une courbe, par exemple, peut non seulement être la trajectoire d'un point comme dans la définition précédente, mais ce peut être aussi une *longueur sans largeur* ou une *limite de surface* ou, comme en géométrie analytique, *l'ensemble des points représentant une fonction continue*. Je me contente de signaler cet ordre de recherches [1]) pour revenir plus vite aux longueurs, aires et volumes.

Je ne parlerai pas des travaux sur la longueur d'un segment; ce sont les travaux sur les fondements de la géométrie; je vais encore dire un mot sur la définition des aires, des domaines plans. Cette définition résulte dans certains cas, de la définition de l'intégrale des fonctions d'une variable. Dans tous les cas elle résulte de la définition des intégrales doubles et de la définition des mesures des ensembles; mais on peut aussi définir l'aire

---

[1]) La notion de courbe et de surface fut très étudiée quelques années plus tard par S. JANISZEMSKI, URYSOHN, MENGER, etc... D'innombrables travaux y sont consacrés, voir par exemple la collection des Fundamenta Mathematicae (Varsovie) depuis 1920.

Lebesgue lui-même participa à l'étude la notion de variété n-dimensionnelle par une très belle définition de la dimension qui reste un des joyaux de son œuvre. G. C.

directement en se donnant à priori les conditions essentielles auxquelles elle doit satisfaire.

Si l'on veut que les aires de deux domaines égaux soient égales, si l'on veut que l'aire du domaine formé par la réunion de deux autres soit la somme des aires de ces deux autres, l'aire est déterminée à un multiplicateur près qui correspond au choix laissé arbitraire de l'unité d'aire pour tous les domaines que M. Jordan appelle les domaines quarrables. Quant aux autres domaines, leur aire n'est pas déterminée par les conditions précitées.

Si l'on considère un domaine formé par la réunion d'une infinité de domaines composants, l'aire précédemment définie du domaine total est la somme des aires des domaines constituants, quand il s'agit de domaines quarrables; mais il est impossible de profiter de l'indétermination de l'aire des domaines non quarrables pour que, dans tous les cas, l'aire d'un domaine D soit la somme des aires des domaines en lesquels on peut décomposer D.

On voit par ces résultats que les problèmes qui se posent sont moins simples qu'on aurait pu le croire. J'ajoute que cette manière de poser le problème des aires, qui peut évidemment être aussi utilisée pour les volumes, est susceptible d'être employée dans un ouvrage élémentaire, comme l'ont fait voir MM. Gérard et Nievenglowski, d'une part, M. Hadamard, de l'autre.

Chapitre IX

Lorsqu'on se borne aux courbes convexes, ou décomposables en courbes convexes, la définition d'Archimède convient; il est vrai que les polygones circonscrits n'existent pas toujours, si l'on entend par polygone circonscrit un polygone dont les côtés sont des tangentes à la courbe, mais ils existent toujours si l'on entend par polygone circonscrit un polygone dont chaque côté n'a qu'un point commun avec la courbe. D'ailleurs, les méthodes qui réussissent dans le cas de la circonférence permettent de démontrer l'identité des deux limites qui interviennent dans la définition d'Archimède. Mais si l'on prend une courbe quelconque, les mêmes raisonnements ne conviennent plus. Après que Paul Du Bois Reymond eût signalé les difficultés que l'on rencontre dans la définition des longueurs, Ludwig Scheeffer, puis M. Jordan, reprirent la question. Voici leur résultat essentiel: si l'on considère une suite quelconque de lignes polygonales inscrites dans une courbe et dont les longueurs des côtés tendent vers zéro, les longueurs de ces lignes tendent vers une limite, finie ou non, indépendante de la suite de lignes choisies.