Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS DE QUELQUES TRAVAUX MATHÉMATIQUES RÉCENTS
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: Chapitre XVI
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44571

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On sait qu'une fonction peut augmenter indéfiniment de bien des manières, la classification des types d'infinitude est un des problèmes qui ont préoccupé du Bois Reymond. Ce problème est très difficile, il semble que le transfini interviendra nécessairement dans cette classification, comme l'a fait remarquer M. Borel qui a poursuivi les recherches de du Bois Reymond en vue d'applications aux séries divergentes et aux séries entières.

La notion de type d'infinitude trouve aussi son application dans le mémoire de du Bois Reymond: pour les fonctions qu'il étudie les conditions de convergence et de divergence obtenues s'expriment par la comparaison de types d'infinitude. Ces conditions de divergence peuvent se caractériser en disant qu'un minimum d'irrégularité dans l'allure de la fonction au point considéré paraît nécessaire à la divergence. Si cette apparence n'est pas trompeuse, il faut s'attendre à ce que quelque chose d'analogue aux types de croissance s'introduise nécessairement dans toute condition très large de convergence.

Les conditions de convergence actuellement connues, sont déjà assez étendues pour que l'on puisse citer des fonctions sommables, mais non intégrables au sens de Riemann, qui sont représentées par leur série de Fourier partout convergente.

Avant de quitter ces recherches sur la convergence, je veux citer une méthode tout élémentaire que M. Kneser vient d'employer très heureusement. Démontrons, ce qui est facile, que deux fonctions continues différentes ne peuvent avoir la même série de Fourier; alors on pourra affirmer qu'une fonction continue est représentée par sa série de Fourier dans tous les cas où l'on démontrera que cette série est convergente, intégrable terme à terme et qu'elle représente une fonction continue. Cela permet d'obtenir très élémentairement des conditions de convergence pratiquement suffisantes en général.

Chapitre XVI

Dans ses recherches sur les cordes vibrantes, Lagrange utilise la série

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$$

à laquelle il assigne la somme $-\frac{1}{2}$ [1]).

---

[1]) Lagrange transforme cette série en une somme de deux progressions géométriques d'exponentielles imaginaires et il applique à ces progressions divergentes la formule de sommation des progressions convergentes.

Faisons dans cette série $x = \pi$ on a la série

$$-1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

à laquelle Leibnitz avait attaché la somme $-\frac{1}{2}$ parce que $-\frac{1}{2}$ est la moyenne des sommes successives -1 et 0. Faisons encore $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$, on a des séries auxquelles, pour des raisons analogues, on attribuait la somme $-\frac{1}{2}$. Dans le tome IV de ses Opuscules, D'Alembert, tout en s'élevant contre cet emploi du mot somme, démontre que la moyenne arithmétique des sommes successives de la série tend vers $-\frac{1}{2}$, pour $0 < x < 2\pi$.

C'est de ces remarques que date la méthode de sommation des séries divergentes au moyen de la moyenne arithmétique. Mais cette méthode, malgré un important résultat de Frobenius, malgré les recherches de M. Cesaro, était restée une simple curiosité jusqu'aux travaux de M. Borel sur les séries divergentes sommables. Ces travaux peuvent être regardés comme une extension considérable de la méthode de sommation arithmétique; l'importance de leurs résultats apparaît surtout dans l'étude des séries entières auxquelles se rapportent bien des recherches récentes, en particulier celles de M. Mittag-Leffler.

Les résultats de M.M. Borel et Mittag-Leffler ont donné à M. Fejèr l'idée d'essayer de sommer les séries de Fourier divergentes. Son résultat essentiel est le suivant: une Série de Fourier est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique et représente la fonction correspondante en tous les points où cette fonction est continue.

Je n'insiste pas sur les conséquences de cette importante proposition ni sur les autres résultats de M. Fejèr; j'ai tenu à dire à la suite de quel détour le procédé de sommation par la moyenne arithmétique, imaginé à l'occasion d'une série trigonométrique, avait été appliqué aux séries de Fourier.

Sans sortir de la famille des séries trigonométriques convergentes, on peut se demander s'il n'en existe pas d'autres que les séries de Fourier. Cette existence est certaine quand on renonce en général à la convergence, mais supposons que les points de divergence forment au plus un ensemble réductible. Des recherches de Heine et de M. Cantor il résulte que dans ces conditions il ne peut y avoir plus d'une série représentant la fonction donnée. Les résultats obtenus par Riemann dans son célèbre mémoire déjà cité, jouent le rôle fondamental dans ces recherches; ils consistent surtout dans l'énoncé des rapports entre la fonction représentée $f(x)$ et la fonction $F(x)$ que représente la fonction intégrée deux fois. $f(x)$ dépend de

$F(x)$ à la manière dont une dérivée seconde dépend de sa fonction primitive. Le théorème de Heine — Cantor est l'analogue du théorème fondamental: deux fonctions ayant la même dérivée ne diffèrent que par une constante; ici on a cet énoncé: $F(x)$ est déterminé par $f(x)$ a un polynome additif du premier degré près.

Reste à trouver ces fonctions $F(x)$; lorsque $f(x)$ est bornée et intégrable au sens de Riemann, il résulte de travaux de Dini, Ascoli, P. du Bois Reymond que $F(x)$ s'obtient en intégrant deux fois de suite $f(x)$ et cela veut dire que la seule série trigonométrique qui puisse représenter $f(x)$ est la série de Fourier de $f(x)$. Ce résultat s'étend à toute fonction bornée grâce à l'intégration des fonctions sommables, mais le cas de fonctions non bornées appelle encore bien des recherches.

On voit l'analogie grande qu'il y a entre le problème des séries trigonométriques et le problème inverse de la dérivation; il est probable que tout progrès de l'un de ces problèmes sera accompagné d'un progrès de l'autre. Il en a du moins toujours été ainsi jusqu'à présent et c'est l'une des principales raisons qui donnent aux séries trigonométriques une place à part dans la théorie des fonctions. [1])

J'ai déjà dit que le mémoire de Riemann est la base des recherches générales; il est remarquable que ce mémoire contiennent plusieurs démonstrations de faits peu intéressants par eux-mêmes, en apparence du moins, et qui se sont trouvés des plus importants dans les recherches ultérieures. Si l'on remarque aussi que Riemann n'a jamais destiné son mémoire à l'impression, — ce mémoire n'a été publié qu'après la mort de l'auteur — on sera peut-être conduit à penser que Riemann s'était posé plusieurs des problèmes qu'on a résolu depuis et qu'il avait eu l'intention de poursuivre ses recherches. Il est vrai qu'aucune note concernant ce sujet n'a été publiée par ceux qui ont recueilli les papiers de Riemann; mais, si ses intentions primitives sont celles que j'imagine, on ne peut s'étonner que,

---

[1]) Lebesgue avait remarquablement bien vu le rapport entre le problème des séries trigonométriques et le problème inverse de la dérivation.

C'est en effet en mettant en œuvre les idées qui lui avaient déjà permis en 1915 de résoudre le second problème, que M. Arnaud Denjoy put en 1920-1921, calculer les cœfficients d'une série trigonométrique convergente quelconque, dès que la somme est connue.

Ces travaux sont développés dans son ouvrage en plusieurs volumes publié chez Gauthier-Villars. On y trouvera en outre une étude détaillée des ensembles parfaits linéaires, et un exposé des théorèmes topologiques qui sont à la base de ces résultats.

G. C.

pendant les douze années si bien remplies qu'il lui restait à vivre, Riemann n'ait pas trouvé le temps de les mettre à exécution.

Des recherches sur les séries trigonométriques, j'extraie encore un théorème de M. de la Vallée Poussin d'après lequel toute série de Fourier, même divergente, est intégrable terme à terme; c'est, si l'on veut, la confirmation de cette induction vague qui conduisit Euler à considérer les séries trigonométriques dans son mémoire de 1748. [1])

Chapitre XVII

Jusqu'à ces dernières années on n'avait pas entrepris de recherches directes sur la puissance de représentation des expressions analytiques, mais bien des travaux avaient fourni des renseignements sur ce sujet, les travaux de Fourier et de Dirichlet par exemple.

J'insiste sur le résultat précis de Dirichlet: une fonction continue qui n'a qu'un nombre fini de maximum est représentable par sa série de Fourier.

Ainsi, alors que D'Alembert croyait pouvoir énoncer des propriétés très particulières appartenant aux fonctions représentables trigonométriquement, alors qu'on aurait pu craindre ne pouvoir exprimer que par des relations analytiques compliquées des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit exprimable analytiquement, il suffit que des conditions très simples, relatives à sa variation, soient remplies pour que la fonction soit représentable analytiquement par une série trigonométrique.

Weierstrass a fait connaître un théorème très important pour notre sujet: toute fonction continue est représentable par une série uniformément convergente de polynomes. Ce théorème, dont on possède de très nombreuses démonstrations, fait rentrer toutes les fonctions continues dans la classe des fonctions représentables analytiquement. *Les géomètres du*

---

[1]) On ne saurait omettre de rappeler que la théorie des Distributions de L. Schwartz permet de donner un sens à la somme de toute série trigonométrique sont les cœfficients a_n et b_n croissent moins vite qu'une puissance de n.

La somme est une « distribution » périodique, inversément toute distribution périodique est la somme d'une telle série.

On peut donc dire que toute série dont les cœfficients ne croissent pas trop vite est la série de Fourrier d'une fonction ou d'une distribution.

En particulier, toute série trigonométrique qui converge partout a aussi pour somme une distribution. On peut donc lui attacher deux êtres: D'une part une fonction, d'autre part une distribution; certes chacun de ces êtres détermine l'autre; mais le passage de l'un à l'autre n'est pas simple. G. C.