Chapitre XVIII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comme conséquence de ces résultats on peut donner des exemples de fonctions appartenant à l'une quelconque des classes qu'a imaginées M. Baire; on peut aussi construire des fonctions qui échappent à la classification considérée. *Dans le cas des fonctions discontinues, l'ancienne distinction entre les fonctions géométriques et les fonctions arbitraires est fondée parce qu'on peut nommer des fonctions échappant à tout mode de représentation analytique.*

Chapitre XVIII

Le travail de M. Baire a suscité d'autres recherches, on s'est demandé, par exemple, quels renseignements les méthodes de cet auteur donneraient concernant les séries de polynomes complexes; je laisse ces recherches de côté pour faire quelques remarques au sujet des résultats indiqués.

La classification de M. Baire, dont toutes les classes existent effectivement, fait intervenir le transfini. Il semble bien que la notion des nombres transfinis ne pourra plus être plus longtemps bannie des mathématiques [1]), j'ai déjà eu l'occasion de dire qu'on la rencontrait dans l'étude des modes de croissance, on la rencontre aussi dans l'étude des ensembles réductibles, utiles comme je l'ai dit dans l'intégration et dans la théorie des séries trigonométriques et dont l'intérêt pour la théorie des fonctions de variable complexe a été mis tout d'abord en évidence par M. Mittag-Leffler.

En somme cette notion nouvelle n'a rien d'obscur et je crois que son introduction en mathématiques n'aurait soulevé aucune objection si, comme ça été le cas pour bien d'autres notions, les applications avaient précédé et préparé la théorie abstraite et si surtout on n'avait pas imaginé la dénomination malheureuse de nombre transfini.

S'il me plaisait de ranger dans une même classe, que je noterais $\alpha\,\omega + n$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots 9$; $n = 0, 1, 2 \ldots$; ω est un symbole associatif

---

[1]) Prévision que l'avenir a justifiée, puisqu'une grande partie des travaux de M. Denjoy est basée sur l'utilisation des nombres transfinis.

Toutefois, bien que les nombres transfinis restent un moyen puissant de découverte, les exposés synthétiques modernes ne les utilisent guère; par exemple l'axiome du choix sous la forme: Tout ensemble peut être « bien ordonné » est presque toujours remplacé par l'axiome de Zorn qui en est une forme équivalente plus commode.

Par ailleurs, une étude de Kuratowski, Fund. Math, 1922, T. 3, pp. 76-108 a montré que dans de nombreux cas, on pouvait les éliminer des raisonnements mathématiques.

Mais il reste des exposés d'où on ne saurait les éliminer; ce sont les constructions comme la totalisation, dont les étapes successives, en nombre infini sont numérotées par des ordinaux. G. C.

les nombres qu'on peut écrire dans le système décimal en n'employant, que n fois le chiffre α, mais qu'on ne peut écrire sans employer une infinité de fois les chiffres 0, 1, ..., $\alpha - 1$ et enfin dans la classe 10 ω tous les autres nombres, on pourrait m'objecter que ma classification est bizarre et inutile, mais personne n'élèverait d'objections de principe; cependant j'employerais des nombres transfinis. C'est qu'il n'y a aucune difficulté à parler de tous les nombres transfinis inférieurs à un nombre transfini donné; ou peut-être les difficultés commencent, c'est quand on parle de l'ensemble de tous les nombres transfinis.

Les applications des nombres transfinis, que j'ai indiquées, conduisent à des énoncés où le transfini intervient, explicitement ou non; les raisonnements où le transfini intervient sans subsister dans le résultat sont plus intéressants encore. Le premier exemple d'un tel raisonnement est dû à MM. Cantor et Bendixson qui démontrèrent, par l'emploi de transfini, que tout ensemble fermé F est formé par la réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait P [1]).

Un second exemple est le raisonnement qui conduisit M. Baire à la condition ci-dessus énoncée pour qu'une fonction soit de classe 1.

Ces raisonnements peuvent être remplacés par d'autres où le transfini n'intervient pas; mais il est remarquable que, tandis que le raisonnement de MM. Cantor et Bendixson fournit une relation entre l'ensemble P et les dérivés de F, tandis que le raisonnement de M. Baire fournit un procédé régulier pour reconnaître si une fonction est ou non de classe 1, les raisonnements sans transfini qu'on leur a substitués ne nous fournissent pas ces renseignements, et ils ne peuvent pas nous les fournir parce que le transfini intervient dans l'énoncé des résultats complémentaires de MM. Cantor et Bendixson et de M. Baire. Les résultats que j'ai appelés complémentaires sont très importants de sorte que, dans certains cas du moins, les simplifications que l'on obtient en se passant du transfini sont plus apparentes que réelles; on a un raisonnement plus simple parce qu'on démontre moins.

Par exemple, M. Lindelöf a donné une très élégante et très simple démonstration du théorème de MM. Cantor et Bendixson; partant des mêmes principes que M. Lindelöf je n'ai pu donner de ce théorème qu'une démonstration en somme compliquée parce que je voulais obtenir aussi

---

[1]) Un ensemble fermé est un ensemble contenant ses points limites; un ensemble parfait est un ensemble fermé dont tous les points sont points limites.

les résultats complémentaires de MM. Cantor et Bendixson, indispensables pour mon objet.

Un raisonnement où le transfini intervient présente en général tous les avantages d'un raisonnement par récurrence. Quand on emploie le raisonnement par récurrence, c'est qu'on a établi une classification, dans laquelle les classes sont numérotées à l'aide de nombres entiers, qui divise la difficulté à vaincre. Quand on emploie le transfini dans un raisonnement c'est qu'on a établi une classification, dont les classes sont numérotées à l'aide de nombres entiers et transfinis, qui divise aussi la difficulté à vaincre. Et pour la vaincre on utilise toujours un raisonnement que j'appellerai le raisonnement par récurrence généralisé et qui repose sur ce jugement: une propriété vraie pour le nombre 1 appartient à tous les nombres entiers et transfinis si elle est vraie pour un de ces nombres dès qu'elle est vraie pour tous les nombres inférieurs.

Ce raisonnement diffère, au moins par la forme, du raisonnement par récurrence ordinaire comme on s'en rend compte en remarquant que $\alpha - 1$ n'a pas toujours de sens. N'y a-t-il là qu'une différence de forme, ou a-t-on affaire à un nouveau mode de raisonnement ? C'est là un point qui mérite l'attention de tous ceux qui s'intéressent aux principes des mathématiques.

Dans une des expositions adoptées par M. Cantor il semble bien que le raisonnement par récurrence généralisé n'introduit rien de nouveau parce que M. Cantor définit les nombres transfinis en énonçant certaines de leurs propriétés parmi lesquelles la suivante: tout ensemble de nombres transfinis différents contient un nombre inférieur à tous les autres, et parce que le raisonnement par récurrence généralisé peut se légitimer à partir de cette propriété comme le raisonnement par récurrence ordinaire se légitime si l'on admet que « dans toute collection d'entiers différents il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres » (Poincaré, Science et Hypothèse, p. 22). Mais si l'on veut démontrer que les propriétés prises comme définition des nombres transfinis sont compatibles, en prouvant que ces propriétés appartiennent à tels ou tels êtres analytiques, aux classes de M. Baire par exemple, ou encore si l'on veut faire une application des résultats de la théorie abstraite aux classes de M. Baire, il faudra démontrer, sans l'emploi de raisonnement par récurrence généralisé, que les propriétés de définition appartiennent bien à ces classes. Il est bien probable que là se retrouverait la difficulté qu'on semblait avoir écartée.

D'ailleurs, à examiner les choses un peu trop superficiellement peut-être pour qu'il soit possible de conclure, il semble bien qu'il y ait une différence

essentielle entre les deux modes de raisonnement. Le raisonnement par récurrence ordinaire fournit un procédé régulier permettant de vérifier la propriété, pour un entier déterminé quelconque, au moyen d'un nombre fini de syllogismes. Le procédé par récurrence généralisé ne permet de vérification pour un nombre transfini que si l'on emploie le raisonnement par récurrence ordinaire. On peut exprimer cela en disant: le raisonnement par récurrence ordinaire permet de conclure pour une collection contenant une infinité dénombrable, le raisonnement par récurrence généralisé permet de conclure pour une collection contenant une infinité non dénombrable d'objets.

Chapitre XIX

Les résultats dont j'ai indiqué l'existence, ainsi que presque tous ceux relatifs aux fonctions générales, appellent une autre remarque. Nous énonçons comme condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit d'une classe déterminée que la fonction jouisse de telle ou telle propriété; mais nous ne savons pas reconnaître en général si une fonction donnée possède ou non cette propriété et, s'il arrive que nous connaissions un procédé régulier permettant de faire cette recherche, ce procédé utilise des opérations que nous ne savons pas toujours effectuer. Ces conditions ne sont-elles que des tautologies sans intérêt ? Puisqu'on a pu en déduire quelque chose elles n'ont pas été inutiles bien qu'elles énoncent seulement l'équivalence de deux problèmes. Mais il y a plus, on peut affirmer que toute autre condition aurait les mêmes inconvénients; il suffit pour s'en convaincre de remarquer qu'il n'est pas d'opération, si simple soit-elle, qu'on sache effectuer sur toute fonction donnée, par quelque procédé que ce soit: on ne sait pas reconnaître si une fonction est continue ou non, on ne sait pas calculer son maximum et son minimum dans un intervalle, etc., et si l'on admet généralement que l'on sait effectuer ces opérations c'est parce que cela est vrai le plus souvent dans la pratique. Il ne faut pas trop demander à une condition nécessaire et suffisante. La condition ci-dessus énoncée qu'a fait connaître M. Baire est souvent applicable pratiquement; les conditions actuellement connues, pour qu'une fonction soit d'une classe déterminée d'indice supérieure à 1, sont mauvaises.

Pour que les problèmes aient des solutions précises, il faudrait s'astreindre à ne considérer que des fonctions définies par des procédés très spéciaux; nous avons vu, par exemple, que le théorème de M. Arzela, qui fait connaître à quelle condition une fonction définie par une série de fonctions continues