Chapitre XIX

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

essentielle entre les deux modes de raisonnement. Le raisonnement par récurrence ordinaire fournit un procédé régulier permettant de vérifier la propriété, pour un entier déterminé quelconque, au moyen d'un nombre fini de syllogismes. Le procédé par récurrence généralisé ne permet de vérification pour un nombre transfini que si l'on emploie le raisonnement par récurrence ordinaire. On peut exprimer cela en disant: le raisonnement par récurrence ordinaire permet de conclure pour une collection contenant une infinité dénombrable, le raisonnement par récurrence généralisé permet de conclure pour une collection contenant une infinité non dénombrable d'objets.

Chapitre XIX

Les résultats dont j'ai indiqué l'existence, ainsi que presque tous ceux relatifs aux fonctions générales, appellent une autre remarque. Nous énonçons comme condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit d'une classe déterminée que la fonction jouisse de telle ou telle propriété; mais nous ne savons pas reconnaître en général si une fonction donnée possède ou non cette propriété et, s'il arrive que nous connaissions un procédé régulier permettant de faire cette recherche, ce procédé utilise des opérations que nous ne savons pas toujours effectuer. Ces conditions ne sont-elles que des tautologies sans intérêt ? Puisqu'on a pu en déduire quelque chose elles n'ont pas été inutiles bien qu'elles énoncent seulement l'équivalence de deux problèmes. Mais il y a plus, on peut affirmer que toute autre condition aurait les mêmes inconvénients; il suffit pour s'en convaincre de remarquer qu'il n'est pas d'opération, si simple soit-elle, qu'on sache effectuer sur toute fonction donnée, par quelque procédé que ce soit: on ne sait pas reconnaître si une fonction est continue ou non, on ne sait pas calculer son maximum et son minimum dans un intervalle, etc., et si l'on admet généralement que l'on sait effectuer ces opérations c'est parce que cela est vrai le plus souvent dans la pratique. Il ne faut pas trop demander à une condition nécessaire et suffisante. La condition ci-dessus énoncée qu'a fait connaître M. Baire est souvent applicable pratiquement; les conditions actuellement connues, pour qu'une fonction soit d'une classe déterminée d'indice supérieure à 1, sont mauvaises.

Pour que les problèmes aient des solutions précises, il faudrait s'astreindre à ne considérer que des fonctions définies par des procédés très spéciaux; nous avons vu, par exemple, que le théorème de M. Arzela, qui fait connaître à quelle condition une fonction définie par une série de fonctions continues

est de classe 1, ne donne encore pour ce cas simple qu'une condition souvent inapplicable pratiquement. Pour résoudre pratiquement un problème relatif aux fonctions il faudrait examiner successivement les différents procédés employés actuellement pour donner une fonction. Une énumération complète de ces procédés paraît difficile; je me contenterai d'examiner ce que l'on entend par *une fonction donnée.*

Chapitre XX

La définition générale des fonctions est si vague que non seulement elle ne suffirait pas à donner l'idée de fonctions à qui ne l'aurait pas mais encore qu'elle ne fournit pas de réponse précise à cette question: comment peut-on nommer une fonction ?

On ne fait plus en général de différence entre une fonction déterminée et une fonction définie ou donnée; je me conformerai à cet usage. Parfois même on dit fonction connue à la place de fonction déterminée, mais on verra qu'il est possible qu'une fonction soit déterminée et qu'on ne connaisse presque rien sur elle.

Tant qu'une fonction était une expression de calcul, donner une fonction a été nommer ou écrire la représentation analytique de la fonction. Plus tard, donner une fonction ce fut indiquer un procédé quelconque permettant d'obtenir la valeur de la fonction pour chaque valeur donnée de la variable. Mais cela est peu clair; la valeur donnée de la variable peut être définie par son développement décimal, par son développement en fraction continue, et de bien d'autres façons encore. Lorsque l'on dit d'une fonction qu'elle est nulle pour toutes les valeurs rationnelles de la variable et égale à 1 pour les autres, on définit bien une fonction et cependant on ne connaît pas sa valeur, quand la valeur donnée de la variable est la constante d'Euler.

Cette difficulté résolue ou écartée pour la variable va se présenter à nouveau pour la fonction et il s'en présentera d'autres; supposons, pour ne pas donner un sens trop restreint à notre énoncé, qu'une fonction $\varphi(x)$ sera définie quand on saura la calculer, pour x donné, avec une approximation donnée quelconque. Alors une série convergente ne définira une fonction que si l'on sait apprécier la rapidité de sa convergence pour chaque valeur de la variable.

En présence de ces difficultés on peut prendre bien des attitudes. Par exemple, puisqu'il n'est pas d'opération qu'on puisse effectuer réellement sur les nombres irrationnels, on peut n'admettre pour la variable ou la