Chapitre XX

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

est de classe 1, ne donne encore pour ce cas simple qu'une condition souvent inapplicable pratiquement. Pour résoudre pratiquement un problème relatif aux fonctions il faudrait examiner successivement les différents procédés employés actuellement pour donner une fonction. Une énumération complète de ces procédés paraît difficile; je me contenterai d'examiner ce que l'on entend par *une fonction donnée.*

Chapitre XX

La définition générale des fonctions est si vague que non seulement elle ne suffirait pas à donner l'idée de fonctions à qui ne l'aurait pas mais encore qu'elle ne fournit pas de réponse précise à cette question: comment peut-on nommer une fonction ?

On ne fait plus en général de différence entre une fonction déterminée et une fonction définie ou donnée; je me conformerai à cet usage. Parfois même on dit fonction connue à la place de fonction déterminée, mais on verra qu'il est possible qu'une fonction soit déterminée et qu'on ne connaisse presque rien sur elle.

Tant qu'une fonction était une expression de calcul, donner une fonction a été nommer ou écrire la représentation analytique de la fonction. Plus tard, donner une fonction ce fut indiquer un procédé quelconque permettant d'obtenir la valeur de la fonction pour chaque valeur donnée de la variable. Mais cela est peu clair; la valeur donnée de la variable peut être définie par son développement décimal, par son développement en fraction continue, et de bien d'autres façons encore. Lorsque l'on dit d'une fonction qu'elle est nulle pour toutes les valeurs rationnelles de la variable et égale à 1 pour les autres, on définit bien une fonction et cependant on ne connaît pas sa valeur, quand la valeur donnée de la variable est la constante d'Euler.

Cette difficulté résolue ou écartée pour la variable va se présenter à nouveau pour la fonction et il s'en présentera d'autres; supposons, pour ne pas donner un sens trop restreint à notre énoncé, qu'une fonction $\varphi(x)$ sera définie quand on saura la calculer, pour x donné, avec une approximation donnée quelconque. Alors une série convergente ne définira une fonction que si l'on sait apprécier la rapidité de sa convergence pour chaque valeur de la variable.

En présence de ces difficultés on peut prendre bien des attitudes. Par exemple, puisqu'il n'est pas d'opération qu'on puisse effectuer réellement sur les nombres irrationnels, on peut n'admettre pour la variable ou la

fonction que des valeurs rationnelles; mais cela ne résoud aucune difficulté. Par quelque nom qu'on désigne ce que l'on appelle communément les nombres irrationnels, ou qu'on se refuse à les nommer, cela n'empêchera pas ces nombres de s'introduire naturellement et nécessairement dans bien des questions d'analyse. Aussi renonce-t-on en général à limiter le champ de variation de la fonction et de la variable.

Pour les opérations, on peut n'admettre que celles qu'on peut véritablement effectuer ou au contraire, ce qui est l'attitude adoptée généralement, on peut admettre toute opération qu'on sache ou non l'effectuer.

Par exemple, je définis une fonction de la manière suivante: j'écris x sous forme décimale, je barre les chiffres décimaux de rang pair, si les chiffres restants forment le développement décimal d'un nombre algébrique, la fonction y sera égale à 1, sinon elle sera nulle. Dans cette définition interviennent des opérations que je ne peux pas effectuer: je ne peux pas écrire une infinité de chiffres; pour cela la forme de l'énoncé seule est fautive. Mais il intervient aussi des opérations que je ne sais pas effectuer: reconnaître si un développement décimal correspond ou non à un nombre algébrique. Le mot définir a acquis ici le sens de déterminer.

Déterminer un objet c'est faire en sorte que « deux personnes lorsqu'elles parlent de cet objet soient certaines qu'elles parlent du même »; c'est donc nommer une propriété caractéristique de cet objet.

Je ferai remarquer qu'on peut déterminer une fonction y (x) sans nommer une propriété caractéristique de chacun des ensembles (y, x), mais en nommant une propriété caractéristique de la fonction; c'est par exemple ce que l'on fait constamment dans la théorie des équations différentielles quand on détermine une solution par des conditions initiales ou aux limites. Je pourrais déterminer une fonction en disant: c'est la première de celles indiquées dans l'ouvrage portant tel numéro dans le catalogue de la bibliothèque universitaire de Rennes. Que l'on écarte ou non ces déterminations, faisant intervenir l'expérience, il n'est pas inutile de remarquer combien l'on connaît peu de choses relativement à une fonction quand on n'en connaît que sa détermination.

Quel que vaste que soit l'ensemble des déterminations logiques, certains mathématiciens ont admis un mode de détermination plus étendu encore. Dans sa théorie générale des fonctions Paul du Bois Reymond, met aux prises deux contradicteurs: l'Idéaliste et l'Empiriste. Ces deux philosophes ne discutent pas sur la détermination des fonctions mais, au cours de leur discussion sur la notion de limite, ils prennent position dans la question de la détermination des fonctions, question intimement liée à celle qu'ils

étudient. L'Empiriste n'admet que les déterminations logiques, l'Idéaliste en admet d'autres.

Quand il s'agit d'une fonction déterminée logiquement mais dont nous ne savons pas calculer la valeur, nous nous croyons en droit de raisonner sur elle parce que seule la propriété caractéristique qui détermine la fonction intervient dans notre raisonnement. Il arrive d'ailleurs souvent que la propriété caractéristique n'intervient pas toute entière; quand on démontre, par la méthode de Cauchy, qu'une fonction continue est intégrable on raisonne sur une fonction de laquelle on sait seulement qu'elle est continue et déterminée, peu importe comment. Pour l'Empiriste un tel raisonnement n'est qu'une forme vide de sens mais qui acquiert un sens dès qu'on refait le raisonnement à l'occasion d'une fonction particulière déterminée. Alors, toutes les fois qu'on parle de la fonction déterminée, on pense à la propriété caractérisant la fonction. Bien entendu, par économie, on ne refait pas le raisonnement pour toutes les fonctions auxquelles on veut appliquer la propriété; il suffit de savoir qu'on pourrait le refaire.

Ce qui est une forme vide de sens pour l'Empiriste est le raisonnement définitif et complet pour l'Idéaliste parce que, pour lui une fonction est déterminée dès qu'il affirme qu'elle l'est. Quand un *I.* parle d'une fonction déterminée il ne pense pas à une propriété caractéristique il pense seulement aux mots à fonction déterminée. Quand un *I.* veut déterminer une fonction il n'en cherche pas une propriété caractéristique qui lui permettrait, à lui comme aux autres, d'être certain de penser toujours à la même fonction, il se contente de dire qu'il choisit cette fonction, qu'il la détermine; il affirme aux autres, ils s'affirme à lui-même que c'est toujours à la même fonction qu'il pense. Cette affirmation, que l'*I.* reconnaît et déclare incontrôlable, paraît dépourvue de sens à l'*E.* qui met en dehors des mathématiques, les déterminations particulières à l'*I.*

Il y a bien des manières d'être *I.* ou *E.* L'*I.* de du Bois Reymond dit à un moment que c'est « le désir ardent de dépasser les limites de ce qui est *aujourd'hui* représentable » qui engendre l'idéalisme. S'il s'agissait seulement de savoir s'il est opportun de commencer dès maintenant certaines recherches ou de les remettre à plus tard, la discussion perdrait beaucoup d'intérêt; mais il ne faut voir dans la phrase citée, qu'une concession faite à l'*E.* L'*I.* qui ne s'arrête pas à mi chemin veut qu'on lui reconnaisse le droit de raisonner sur ce qui ne sera jamais représentable. L'*I.* conséquent « pose comme fondement l'essence des choses supposées indépendantes de l'existence de cerveaux humains »; dès lors ce qui lui paraît important, dans le raisonnement par lequel Cauchy légitime l'intégration des fonction

continues, c'est que la fonction dont on s'occupe est différente des autres; peu importe que l'on sache ou non dire en quoi consiste cette différence, c'est-à-dire déterminer la fonction.

L'*E.* comme l'*I.* se reconnaît le droit de raisonner sur cette fonction dont j'ai parlé et qu'il ne connaît que par la place qu'elle occupe dans la bibliothèque de Rennes, bien qu'il ne sache pas la déterminer logiquement; mais l'*E.* sait bien que cette fonction étant écrite dans un livre est déterminable logiquement. L'*I.* raisonnerait encore volontiers sur la fonction en question si le livre qui la contient était l'œuvre de quelque divinité ayant eu l'éternité à sa disposition pour écrire sur les pages du livre, supposées en nombre infini, les valeurs $f(1)$, $f(2)$, ... de la fonction, que l'on ne considérera que pour les valeurs entières de la variable. Et cependant il serait alors douteux qu'on puisse déterminer logiquement cette fonction en prononçant un nombre fini de mots; il serait d'ailleurs impossible, puisqu'on ne peut lire une infinité de nombres, de reconnaître si la fonction est ou non déterminable à la manière de l'*E.*

Si le lecteur ne peut admettre que le nombre des pages d'un livre soit infini, il admettra peut-être plus volontiers que les étoiles sont en nombre infini. Il lui suffira alors de supposer que sur ces étoiles sont marquées les valeurs $f(1)$, $f(2)$; ... pour avoir l'exemple de fonction non déterminable logiquement que M. Jules Tannery a donné dans la *Revue des Sciences* (tome VIII, pages 128-140, 1897).

Quant à un exemple effectif il faut évidemment renoncer à en donner un; toute fonction que l'on peut nommer est déterminable logiquement.

Chapitre XXI

Si l'on ne peut nommer que les fonctions de l'*E*, pourquoi en considérer d'autres ? Quel intérêt ces discussions peuvent-elles avoir pour le mathématicien qui ne rencontrera jamais que les fonctions de l'*E.*

Il est certain qu'un calcul effectif ne sera jamais effectué que sur une fonction de l'*E*, mais, à l'occasion de ces fonctions, on peut employer incidemment une détermination idéaliste. C'est ce qu'a fait récemment M. Zermelo dans un raisonnement qui a ravivé la querelle entre idéalistes et empiristes. Les lecteurs de la Revue ont été mis au courant de cela par deux notes parues le 30 mars 1905 et le 30 juin 1905.

Le raisonnement de M. Zermelo est trop compliqué pour que je le développe ici, mais je vais donner un exemple de ce que ce peut être qu'une