Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DISTANCE BOOLÉENNE SUR UN 3-ANNEAU
Autor: Batbedat, André
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44577

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DISTANCE BOOLÉENNE SUR UN 3-ANNEAU

par André BATBEDAT

INTRODUCTION

Dans [3] et [4] respectivement, R. A. MELTER et J. ZEMMER se sont intéressés à une géométrie booléenne sur un p-anneau.

Le travail ici présenté a été motivé par leurs articles; nous avons essayé de retrouver les principales propriétés de la géométrie classique dans le cas particulier des 3-anneaux (voir définition 2).

Pour les transformations ponctuelles l'adaptation est relativement aisée; par contre il ne semble pas que les notions de droite ou de segment conviennent dans cette théorie: c'est le disque qui s'impose...

Nous avons opté pour un exposé élémentaire afin que cet article soit accessible à tous les mathématiciens spécialistes de la question ou non. C'est ainsi que nous n'utilisons pas directement la notion de spectre pour un anneau et commençons par des rappels très développés concernant les anneaux booléens.

Tous les anneaux considérés sont unitaires.

Rappel :

Un *anneau booléen* $(B, \oplus, .)$, muni de la somme $\oplus$ et du produit $.$, est défini par:

« Pour tout $\alpha \in B$, $\alpha^2 = \alpha$ » (Tout élément est idempotent).

Par $(2\alpha)^2 = 4\alpha = 2\alpha$, on voit que B est de caractéristique 2. Par $(\alpha \oplus \beta)^2 = \alpha \oplus \beta$ il vient $\alpha\beta \oplus \beta\alpha = 0$: compte-tenu de ce qui précède, B est commutatif.

Considérons sur B la relation $\alpha\beta = \alpha$; elle est réflexive (idempotence), antisymétrique (commutativité) et transitive: c'est une relation d'ordre $\alpha \leq \beta$.

Puisque pour tout $\alpha \in B$, $\alpha 0 = 0$ et $\alpha 1 = \alpha$, 0 est le plus petit élément et 1 le plus grand.

Si ε est un minorant de γ et δ alors $\varepsilon\gamma = \varepsilon$ et $\varepsilon\delta = \varepsilon$ donc $\varepsilon\gamma\delta = \varepsilon$: ε minore $\gamma\delta$. Or $\gamma\delta\gamma = \gamma\delta$ et $\gamma\delta\delta = \gamma\delta$: $\gamma\delta$ est un minorant de γ et δ.

Ainsi pour tout couple (γ, δ) il existe un plus grand minorant $[\mathrm{Inf}\,(\gamma, \delta)]$ noté $\gamma \wedge \delta$: On dit que $(B, \leqq)$ est un inf-demi-treillis.

On vérifie de même que pour tout couple (γ, δ) il existe un plus petit majorant $[\mathrm{Sup}\,(\gamma, \delta)]$ noté $\gamma \vee \delta$, à savoir $\gamma \oplus \delta \oplus \gamma\delta$. On dit alors que $(B, \leqq)$ est un treillis.

Ce treillis est distributif parce qu'il en est ainsi des opérations $\wedge$ et $\vee$, l'une par rapport à l'autre; il est complémenté: pour tout $\alpha \in B$,

$$\alpha \wedge (1 \oplus \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \vee (1 \oplus \alpha) = 1 .$$

Comme exemple (classique) d'anneau booléen citons l'ensemble des parties d'un ensemble muni de la différence symétrique et de l'intersection: le inf et le sup correspondant respectivement à l'intersection et à la réunion.

Le seul anneau booléen intègre est $\mathbf{Z}_{/2}$ (et c'est un corps); en effet, avec $\alpha \,.\, (1 \oplus \alpha) = 0$, l'intégrité implique $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

Définition 1 :

Soit A un ensemble, B un anneau booléen et d une application de A^2 dans B telle que:

$$\begin{cases} \text{i)} \; d(a, b) = 0 \text{ ssi } ^{1)} \; a = b \\ \text{ii)} \; d(a, b) = d(b, a) \\ \text{iii)} \; d(a, b) \vee d(b, c) \geqq d(a, c) \end{cases}$$

pour tous a, b, c de A.
On dit que d est une *distance* (booléenne) sur A.

Exemple :

On vérifie que si $A = B$, $d(\alpha, \beta) = \alpha \oplus \beta$ est une distance sur B.

Définition 2 :

A est un *3-anneau* [2] si c'est un anneau vérifiant:
pour tout $a \in A$, $a^3 = a$ et $3a = 0$

Dans toute la suite A désigne un 3-anneau.

Exemple :

$(\mathbf{Z}/3)^n$ est un 3-anneau.

---

[1]) ssi: si et seulement si.
[2]) Les 3-anneaux sont étudiés dans: [1], *ensemble généralisé des parties d'un ensemble.*

Remarque 1 :

i) Dans A tout carré est idempotent ($a^4=a^2$).
On note B l'ensemble des idempotents.

ii) $a^2=0$ est équivalent à $a=0$

iii) $4a=a$ pour tout $a \in A$.

MONTRONS QUE TOUT 3-ANNEAU EST COMMUTATIF

Pour tout $a \in A$, tout $\alpha \in B$, $a=1.a=(1-\alpha)\,a+\alpha a$ d'où: $a\alpha=(1-\alpha)\,a\alpha+$ $+\alpha a\alpha$

De $[(1-\alpha)\,a\alpha)^2=0$ on tire (Remarque 1, ii)] $a\alpha-\alpha a\alpha=0$

De même $\alpha a-\alpha a\alpha=0$

et par conséquent $\alpha a=a\alpha$: on dit que les idempotents de A sont centraux.

Ainsi on a: $a\,(a^2+b)^2=(a^2+b)^2 a$ (Remarque 1, i))

Soit $a\,(a^2+a^2b+ba^2+b^2)=(a^2+a^2b+ba^2+b^2)a$

$$a+ab+aba^2+ab^2=a+a^2ba+ba+b^2a$$

$$2ab=2ba$$

d'où (Remarque 1, iii)): $\boxed{ab=ba}$ tous a, b, dans A.

Remarque 2 :

B, ensemble des idempotents de A, muni de la somme: $\alpha \oplus \beta=\alpha+\beta+\alpha\beta$ et du produit $\alpha\beta$ (produit dans A) est un anneau booléen.

Le sup et le inf s'expriment avec les opérations dans A:

$$\begin{cases} \gamma \wedge \delta = \gamma\delta \\ \gamma \vee \delta = \gamma+\delta-\gamma\delta \end{cases}$$

Lemme 1 :

Pour tous a, b, c de A, l'expression:

$$(a-b)^2 \vee (b-c)^2\,,$$

est symétrique en a, b, c.

En effet: $(a-b)^2=a^2+b^2+ab$ et par suite (remarque 2):

$$(a-b)^2 \vee (b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab\,.$$

Propriété 1 :

L'application d de A^2 dans B (Remarque 2) définie par:

$$d\,(a,b) = (a-b)^2\,.$$

est une distance (booléenne).

En effet:

i) $(a-b)^2 = 0$ ssi $(a-b) = 0$ (Remarque 1, ii))

ii) $(a-b)^2 = (b-a)^2$

iii) D'après le lemme 1 on a:

$(a-c)^2 \vee (c-b)^2 = (a-b)^2 \vee (b-c)^2$ et par conséquent:

$(a-c)^2 \leqq (a-b)^2 \vee (b-c)^2$.

Remarque 3 :

De $d(a, b) = a^2+b^2+ab$ et $a^2 \vee b^2 = a^2+b^2-a^2b^2$, on tire:

$$a^2 \vee b^2 = d(a, b)+e(a, b)$$

en posant: $e(a, b) = -ab-a^2b^2$

$e(a, b)$ est idempotent et $e(a, b) \,.\, d(a, b) = 0$

D'autre part: $a \,.\, e(a, b) = b \,.\, e(a, b) = -(a+b) \,.\, e(a, b)$.

Définition 3 :

On appelle diamètre d'une partie E de A:

$$\left[\bigvee_{(e,\, f) \in E^2} d(e, f) \right],$$

lorsque ce sup. existe (dans B).

Remarque 4 :

i) Le diamètre d'une partie finie est toujours défini.

ii) Si $E = \{ a, b \}$ le diamètre de E est la distance des points a et b.

iii) Même pour E fini si Card $E \geqq 3$ il n'existe pas nécessairement deux points a et b dans E pour lesquels $d(a, b) =$ diamètre de E, car B n'est pas totalement ordonné.

Définition 4 :

Un cercle $\mathscr{C}_{(r,\rho)}$ de centre $r \in A$ et de rayon $\rho \in B$ est l'ensemble des points $m \in A$ tels que:

$$d(r, m) = \rho$$

Ainsi $m \in \mathscr{C}_{(r,\rho)}$ ssi: $(r-m)^2 = \rho$

multipliant successivement par ρr^2, $\rho(1-r^2)$, $(1-\rho)r^2$, $(1-\rho)(1-r^2)$, il vient respectivement:

$$\rho r^2 m^2 + \rho r m = 0$$
$$\rho (1 - r^2) = \rho (1 - r^2)\, m^2$$
$$m (1 - \rho)\, r^2 = (1 - \rho)\, r$$
$$m^2 (1 - \rho)(1 - r^2) = 0$$

On en déduit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathscr{C}_{(r,\rho)} = \{\, m/m = (1-\rho)\, r - \rho r \varepsilon + \rho\, (1 - r^2)\, n \,\} \\ \text{avec } \varepsilon \in B \text{ et } n \text{ inversible dans } A \end{array}} \qquad (1)$$

Lemme 2 :

Pour tout $\alpha \in B$ il existe un unique idempotent sur le cercle $\mathscr{C}_{(\alpha,1)}$.

Pour tout a inversible dans A il existe un unique élément inversible sur le cercle $\mathscr{C}_{(a,1)}$.

En effet: $\mathscr{C}_{(a,1)} = \{\, m/m = -a\varepsilon + (1-\alpha)\, n \,\}$; m idempotent implique $\varepsilon = 0$ et $n = 1$ d'où $m = 1 - \alpha$

$\mathscr{C}_{(a,1)} = \{\, m/m = -a\varepsilon \,\}$; m inversible implique $\varepsilon = 1$ d'où $m = -a$.

Propriété 2 :

Pour tout cercle le diamètre est égal au rayon.

Pour tout point d'un cercle il existe un unique point « diamétralement opposé ».

En effet:

Soient m_1 et m_2 sur le cercle $\mathscr{C}_{(r,\rho)}$: l'inégalité triangulaire entraîne: $d(m_1, m_2) \leqq d(m_1, r) \vee d(r, m_2) = \rho$. On va montrer que ρ est atteint.

$$(m_1 - m_2) = -\rho r\, [\varepsilon_1 - \varepsilon_2] + \rho\, (1 - r^2)\, [n_1 - n_2]$$
$$d(m_1, m_2) = \rho\, [r d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + (1 - r_2)\, d(n_1, n_2)$$

Fixons m_1: d'après le lemme 2 il existe un unique ε_2 tel que $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$ et un unique n_2 tel que $d(n_1, n_2) = 1$, donc un unique m_2 tel que $d(m_1, m_2) = \rho$.

Définition 5 :

i) a, b, c est un *triplet équilatéral* si $d(a, b) = d(b, c) = d(c, a)$.
On dira aussi: *α-triplet*, pour désigner un triplet équilatéral de distance commune α.

ii) a, b est un *α-biplet* si $d(a, b) = \alpha$.

De la propriété 2 on déduit les propriétés suivantes:

Propriété 3 :

Pour tout ρ-biplet m_1, m_2 de $\mathscr{C}_{(r,\rho)}$ (points « diamétralement opposés ») le triplet r, m_1, m_2 est équilatéral.

Propriété 4 :

Etant donné deux points il existe un unique triplet équilatéral les contenant.

Propriété 5 :

Pour tout biplet a, b, $\mathscr{C}_{(a,d(a,b))}$ et $\mathscr{C}_{(b,d(a,b))}$ ont un unique point commun.

Remarque 5 :

i) si $d(r_1, r_2) > \rho_1 \vee \rho_2$ alors $\mathscr{C}_{(r_1,\rho_1)} \cap \mathscr{C}_{(r_2,\rho_2)} = \phi$

ii) La formule (1) montre que:

$$\mathscr{C}_{(r(1-\rho),\, \rho\,(1-r^2))} \subset \mathscr{C}_{(r,\,\rho)}$$

Plus généralement on va montrer que:

Propriété 6 :

Si l'intersection de deux cercles $\mathscr{C}_{(r_1,\rho_1)}$ et $\mathscr{C}_{(r_2,\rho_2)}$ n'est pas vide elle est contenue dans un cercle de rayon $\rho_1 \cdot \rho_2$.

Soit $m \in \mathscr{C}_{(r_1,\rho_1)}$: il existe $\varepsilon \in B$ et n inversible dans A tels que:

$$m = (1-\rho_1)\, r_1 - \rho_1 r_1\, \varepsilon + \rho_1\, (1-r_1^2)\, n\,.$$

Maintenant on suppose $m \in \mathscr{C}_{(r_2,\rho_2)}$:

De $m = (1-\rho_2)\, m + \rho_2 m = (1-\rho_2)\, m + \rho_2 r_1 m + \rho_2\, (1-r_1)\, m$, on tire:

$$m = (1-\rho_2)\, r_2 + \rho_2\, (1-\rho_1)\, r_1 + \rho_2 r_2^2 \left[-\rho_1 r_1\, \varepsilon + \rho_1\, (1-r_1^2)\, n\right] + \\ + \rho_2\, (1-r_2^2) \left[-\rho_1 r_1\, \varepsilon + \rho_1\, (1-r_1^2)\, n\right],$$

avec la condition: $\rho_1 \rho_2\, (1-r_1^2)\, r_2^2 n = -r_2\, \rho_1 \rho_2\, (1-r_1^2)$. Cette formule du type (1) définit un cercle, qui contient $\mathscr{C}_{(r_1,\rho_1)} \cap \mathscr{C}_{(r_2,\rho_2)}$, et de rayon:

$$\rho_2 r_2^2 \left(\rho_1 r_1^2 + \rho_1 (1-r_1^2)\right(+ \rho_2\, (1-r_2^2) \left(\rho_1 r_1^2 + \rho_1\, (1-r_1^2)\right),$$

c'est-à-dire $\rho_1 \cdot \rho_2$.

Définition 6 :

Un *disque* $\mathscr{D}_{(s,\sigma)}$ de centre $s \in A$ et de rayon $\sigma \in B$ est l'ensemble des points $m \in A$ tels que:

$$d(s, m) \leqq \sigma$$

Ainsi $m \in \mathscr{D}_{(s,\sigma)}$ ssi: $(s-m)^2 \leqq \sigma$
soit $(s-m)^2\ (1-\sigma) = 0$ ou encore $(s-m)\ (1-\sigma) = 0$
c'est-à-dire $m\ (1-\sigma) = s\ (1-\sigma)$

$$\boxed{\mathscr{D}_{(s,\sigma)} = \{\ m/m = (1-\sigma)\ s+\sigma t\ \} \qquad \text{avec } t \in A} \tag{2}$$

Définition 7 :

On appelle *cœur du disque* $\mathscr{D}_{(s,\sigma)}$ le point $s_\circ = (1-\sigma)\ s$.
On appelle *couronne du disque* $\mathscr{D}_{(s,\sigma)}$ le cercle $\mathscr{C}_{(s_\circ,\sigma)}$.

Propriété 7 :

Tout point d'un disque $\mathscr{D}$ est centre de $\mathscr{D}$.

En effet: pour tous m_1, m_2, de $\mathscr{D}_{(s,\sigma)}$:

$$d\,(m_1, m_2) \leqq d\,(m_1, s) \vee d\,(m_2, s) \leqq \sigma$$

Prenant le centre au cœur du disque:

$$\mathscr{D}_{(s_\circ,\sigma)} = \{\ m/m = s_\circ + \sigma t\ \}$$

m est dans la couronne ssi:

$$d\,(m, s_o) = \sigma t^2 = \sigma\ , \qquad \text{c'est-à-dire } \sigma \leqq t^2\ .$$

C'est toujours le cas si t est inversible.

Propriété 8 :

Tout disque $\mathscr{D}$ de rayon σ peut être engendré par:

i) La famille des cercles $\mathscr{C}_{(s,\gamma)}$ centrés en un point s fixe de $\mathscr{D}$ et le rayon γ parcourant $[0, \sigma]$.

ii) La famille des cercles $\mathscr{C}_{(r,\sigma)}$ dont le centre parcourt la couronne de $\mathscr{D}$ et le rayon est σ.

La première famille: définition 6 et propriété 7.

La deuxième famille: puisque pour tout $m \in \mathscr{D}$, $\mathscr{C}_{(m,\sigma)} \subset \mathscr{D}$, il reste à montrer que pour $a \in \mathscr{D}$ il existe m de la couronne de $\mathscr{D}$ tel que $a \in \mathscr{C}_{(m,\sigma)}$. Soit $a = s_o + \sigma t$ et $m = s_o + \sigma n$.

Si nous choisissons n inversible, m sera dans la couronne. Prenons $n = -t + (1-t^2)$. Alors $d\,(m, a) = \sigma\ (n-t)^2 = \sigma$. Cqfd

Propriété 9 :

Si l'intersection de deux disques n'est pas vide, c'est un disque dont le rayon est le produit des rayons.

En effet: soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de rayons respectifs σ et σ' et qui ont le point s en commun; prenons s comme centre commun: $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$ c'est l'ensemble des m tels que $d(s, m) \leqq \sigma$ et $d(s, m) \leqq \sigma'$ d'où $d(s, m) \leqq \sigma\sigma'$.

Considérons la famille des disques contenant deux points a et b: ils admettent tous a pour centre; leur rayon est supérieur ou égal à $d(a, b)$.

Définition 8 :

Le *disque* $\mathscr{D}_{(a,d(a,b))}$ est dit *engendré par* les points *a et b*. On le note $\mathscr{D}^{ab}$ Ainsi, deux points d'un disque de rayon σ engendrent ce disque si leur distance est égale à σ (σ-biplet).

Remarque 6 :

Compte tenu de la remarque 3 le cœur du disque $\mathscr{D}^{ab}$ est

$$s_0 = a \cdot e(a, b) = b \cdot e(a, b) = -(a+b) \cdot e(a, b)$$

Propriété 10 :

$\mathscr{D}^{ab}$ est l'ensemble des points m tels que

$$d(a, m) \vee d(m, b) = d(a, b)$$

En effet: $m \in \mathscr{D}^{ab}$ implique $d(a, m) \vee d(m, b) \leqq d(a, b)$ rayon du disque (Propriété 7): comme d'autre part on a l'inégalité triangulaire:

$$d(a, m) \vee d(m, b) \leqq d(a, b),$$

l'égalité en résulte.

Maintenant si l'on a $d(a, m) \vee d(m, b) = d(a, b)$ on a aussi (lemme 1) $d(am) \vee d(ab) = d(a, b)$ d'où $d(a, m) \leqq d(a, b)$ et donc $m \in \mathscr{D}_{(a,d(a,b))} = \mathscr{D}^{ab}$.

Définition 9 :

Etant donnés les points a, b et l'idempotent α, on appelle *médiateur de* (a, b) *à l'ordre* α et on note $\mathscr{M}^{ab}_{\alpha}$ l'ensemble des points m tels que $d(m, a) = \alpha\, d(m, b)$.

Pour $\alpha = 1$ on dit simplement médiateur de (a, b) et on note $\mathscr{M}^{ab}$.

Pour déterminer $\mathscr{M}^{ab}_{\alpha}$ on multiplie successivement $d(a, m) = \alpha . d(b, m)$ par α et $(1-\alpha)$; il vient respectivement:

$$\alpha(a^2 - b^2 + (a-b)\, m) = 0$$
$$(1-\alpha)\, a = (1-\alpha)\, m$$

m est donc nécessairement de la forme:

$$m=(1-\alpha)\,a-\alpha d\,(a,b)\,(a+b)+\alpha\,(1-d\,(a,b))\,.\,t \qquad avec \qquad t\in A\,.$$

Réciproquement tout m de cette forme vérifie $(1-\alpha)\,m=(1-\alpha)\,a$ et par conséquent $(m-a)=\alpha\,(m-a)$. On a donc:

$$\begin{aligned}(m-a)^2-\alpha\,(m-b)^2&=\alpha a^2+\alpha am-\alpha b^2-\alpha bm\\&=(a-b)\left[\alpha\,(a+b)\,d\,(a,b)+d\,(a,b)\,\alpha m\right]\\&=(a-b)\left[\alpha\,(a+b)\,d\,(a,b)-\alpha d\,(a,b)\,(a+b)\right]=0\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{M}^{ab}_{\alpha}=\{\,m/m=(1-\alpha)\,a-\alpha d\,(ab)\,(a+b)+\alpha\,(1-d\,(ab))\,t\,\}\quad t\in A} \qquad (3)$$

Propriété 11 :

Le médiateur de (a, b) à l'ordre α est un disque de rayon $\alpha.(1-d\,(a, b))$.

Remarque 7 :

Le médiateur $\mathscr{M}^{ab}$ de (a, b) est:

$$\mathscr{M}^{ab}=\{\,m/m=-(a+b)\,d\,(a,b)+(1-d\,(a,b))\,.\,t\,\}\qquad t\in A$$

Etudions $\mathscr{M}^{ab}_{\alpha}\cap\mathscr{D}^{ab}$, c'est-à-dire cherchons les points m du disque engendré par (a, b) tels que $d\,(a, m)=\alpha d\,(b, m)$:

i) D'après la propriété 9, si cette intersection n'est pas vide c'est un disque de rayon nul donc un point.

ii) $m=(1+\alpha)\,a-\alpha b$ est un point de $\mathscr{M}^{ab}_{\alpha}$ $(t=-(a+b))$; c'est aussi un point de $\mathscr{D}^{ab}$ puisque:

$$d\,(a,m)=\alpha.d\,(a,b)\leqq d\,(a,b)$$

Propriété 12 :

Il existe un point m et un seul, sur le disque engendré par a et b, tel que $d\,(a, m)=\alpha d\,(b, m)$, c'est:

$$i_{\alpha}=(1+\alpha)\;a-\alpha b$$

Remarque 8 :

$$d\,(a,i_{\alpha})=\alpha d\,(a,b)\;;\qquad d\,(b,i_{\alpha})=d\,(a,b)\,.$$

L'ensemble des points i_{α}, α décrivant B, est le cercle $\mathscr{C}_{(b,d(a,b))}$ puisque si m est un point de ce cercle $d\,(am)\leqq d\,(ab)$ entraîne $d\,(a, m)=d\,(a, m)$, $d\,(ab)$ et $m=i_{d(a,m)}$.

On remarquera d'autre part que pour tout α, les points b et i_{α} engendrent $\mathscr{D}^{ab}$.

Remarque 9 :

Notant simplement i lorsque $\alpha=1$, $i=-(a+b)$

Définition 10 :

On *appelle milieu de* (a, b) le point i de $\mathscr{D}^{ab}$ équidistant de a et b.

Propriété 13 :

Tout triplet de points dont l'un est le milieu des deux autres, est équilatéral.

Pour tout triplet équilatéral chaque point est le milieu des deux autres.

La première assertion résulte de la remarque 8 pour $\alpha=1$.
Maintenant soit (a, b, c) un triplet équilatéral: alors chaque point appartient au disque engendré par les deux autres.

Propriété 14 :

Pour tout $m \in \mathscr{M}^{ab}$ on a $d(a, i) \leqq d(a, m)$

C'est-à-dire: $d(a, i)$ est la plus petite distance pour m parcourant le médiateur de (a, b). En effet:

$$d(a\ i)=d(a\ b) \leqq d(a\ m) \vee d(m, b)=d(a, m)$$

On voit de plus en plus que si $d(a, i)=d(a, m)$ alors $m=i$ ...

Propriété 15 :

Quand ils sont distincts, les trois points d'un triplet équilatéral ne sont jamais cocycliques.

Soit a, i, b un triplet équilatéral et $\mathscr{C}_{(r,\rho)}$ un cercle circonscrit:

$$d(r, a) \leqq d(r, i) \vee d(i, a) \Rightarrow d(r, a) \leqq d(i, a)$$

ce qui est absurde (propriété 14) si les points sont distincts.

Remarque 10 :

Pour tout α-triplet a, b, c:

$$\begin{aligned}
&a+b+c=0\\
&a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca=-\alpha\\
&a-b=b-c=c-a\\
&a^2-b^2-c^2=-bc \ldots etc \ldots\\
&a-b-c=-a \ldots etc \ldots\\
&a^2-bc=\alpha \ldots etc \ldots
\end{aligned}$$

Comme le montre la remarque 9.

Propriété 16 :

Pour tous a, b l'ensemble des points m tels que $d(a, m) \,.\, d(b, m) = 0$ est le cercle $\mathscr{C}_{(i, d(a,b))}$ avec i milieu de a, b.

Procédons par équivalences:

$$\begin{aligned}
&d(a, m) \cdot d(b, m) = 0 \\
&(a - m)^2 \cdot (b - m)^2 = 0 \\
&(a - m) \cdot (b - m) = 0 \\
&m^2 - am - bm + ab = 0 \\
&m^2 + m(-a - b) = a^2 + a(-a - b)
\end{aligned}$$

i milieu de a, b, et $i^2 + m^2 + mi = i^2 + a^2 + ai$

$$d(i, m) = d(i, a) = d(a, b) \,.$$

Définition 11 :

Une partie E de A est une *base métrique* si pour tous a, b de A:

$$d(a, e) = d(b, e) \text{ pour tout } e \in E \text{ implique } a = b$$

Remarque 11 :

Il n'existe pas de base métrique a un élément.

Si $e = 0$, $d(a, e) = d(-a, e)$ et $a \neq -a$ pour $a \neq 0$.
Si $e \neq 0$, $d(0, e) = d(-e, e)$.

La définition 11 peut s'interpréter ainsi: E est une base métrique si pour tous a, b, de A:

$$\text{« } E \subset \mathscr{M}^{ab} \text{ implique } a = b \text{ »}$$

Comme le diamètre de $\mathscr{M}^{ab}$ est $[1 - d(a, b)]$ (propriété 11), on voit que si le diamètre de E est 1 alors E est une base métrique. Nous avons là une condition suffisante [1].

Considérons une partie E de A Card $E \geqq 2$ vérifiant l'hypothèse: il existe un idempotent β non nul tel que pour tout $(e f,) \in E^2$, $\beta.\ d(e, f.) = 0$ Alors $\beta e = \beta f$. Pour e choisi dans E on a:

---

[1]) La condition nécessaire et suffisante est la suivante:
Soit $X = \operatorname{Spec} B$ le dual de B et ω_{ab} l'of associé canoniquement à $d(a, b)$. On pose $\Omega = \bigcup_{(e,f) \in E^2} \omega_{ef}$.

E est une base métrique ssi Ω est dense dans X. On remarquera que $d(a, e) = d(b, e)$ et $d(a, f) = d(b, f)$ impliquent $d(a, b) \,.\, d(e, f) = 0$ c'est-à-dire $\omega_{ab} \cap \omega_{ef} = \varnothing$ ...

$$d(0,f)=d(-\beta e,f) \text{ pour tout } f\in E$$

ce qui montre que E n'est pas une base métrique si $\beta e \neq 0$.

Envisageons donc le cas où pour tout $e\in E$, $\beta e=0$:

$$d(\beta, e)=d(-\beta, e) \text{ pour tout } e\in E$$

ce qui montre encore que E n'est pas une base métrique.

On suppose maintenant que E est fini; le diamètre de E existe toujours dans ce cas et s'il n'est pas égal à 1 nous sommes dans l'hypothèse précédente (β...)

Propriété 17 :

Une partie E de A, ayant n éléments; $n \geqq 2$, est une base métrique ssi le diamètre de E est 1.

Soit $E=\{e_1, e_2\}$ avec $d(e_1, e_2)=1$: E est une base métrique. Tout point a est caractérisé par les deux idempotents $d(a, e_1)$, $d(a, e_2)$. On a:

$$d(a,e_1)-d(a,e_2)=e_1^2-e_2^2+a(e_1-e_2)$$

d'où:

$$\boxed{a=-(e_1+e_2)+(e_1-e_2)\big(d(a,e_1)-d(a,e_2)\big)} \qquad (4)$$

En particulier on pourra choisir e_1, e_2, parmi 0, 1, 2. $d(a, 0)=a^2$; $d(a, 1)=a^2+a+1$; $d(a, 2)=a^2-a+1$. Le choix: $e_1=1$, $e_2=2$, annule (e_1+e_2) dans la formule (4). Posant $\delta_1(a)=a^2+a+1$ et $\delta_2(a)=a^2-a+1$ il vient:

$$\boxed{a=-\delta_1(a)+\delta_2(a)} \qquad (4\ bis)$$

Posons $\varepsilon_1(a)=1-\delta_1(a)=-a-a^2$; $\varepsilon_2(a)=1-\delta_2(a)=a-a^2$. Les idempotents $\varepsilon_1(a)$, $\varepsilon_2(a)$ sont orthogonaux et:

$$a=-\delta_1(a)+\delta_2(a)=(1-\delta_1(a))-(1-\delta_2(a))=\varepsilon_1(a)-\varepsilon_2(a).$$

Réciproquement soient α et β deux idempotents orthogonaux tels que $a=\alpha-\beta$.

Il vient $a^2=\alpha+\beta$ d'où $\begin{cases} \alpha=-a-a^2=\varepsilon_1(a) \\ \beta=a-a^2=\varepsilon_2(a). \end{cases}$

Propriété 18 :

Pour tout $a\in A$ il existe un couple unique d'idempotents orthogonaux $\varepsilon_1(a)$, $\varepsilon_2(a)$, tels que:

$$a=\varepsilon_1(a)-\varepsilon_2(a)$$

Définition 12 :

i) On appelle *contraction* une application T de A dans A telle que pour tous a, b, de A:

$$d\big(T(a), T(b)\big) \leqq d(a, b)$$

ii) On appelle *isométrie* une application de A dans A qui conserve les distances.

iii) On appelle *translation* et on note $\mathscr{C}_v$, $v \in A$, l'application de A dans A: $m \to m+v$.

Remarque 12 :

i) L'ensemble des contractions (resp: des isométries; resp: des translations) est stable pour la composition des applications de A dans A.

ii) Toute isométrie est une contraction.

iii) Toute translation est une isométrie.

Soit T' une contraction: $T=\mathscr{C}_{-T'(0)} \circ T'$ est une contraction: $T(a)= =T'(a)-T'(0)$; elle laisse 0 fixe.

Etudions les contractions T à 0 fixe [1]):

$$\begin{cases} T(0)=0 \\ d\big(T(a), T(b)\big(\leqq d(a, b) \end{cases}$$

$T^2(a)=d\big(T(0), T(a)\big) \leqq d(0, a)=a^2$, d'où pour $\alpha \in B$: $T^2(\alpha a) \leqq (\alpha a)^2 \leqq \alpha$ ce qui implique $T(\alpha a)=\alpha.\ T(\alpha a)$

Par suite $\big(T(\alpha a)-\alpha.T(a)\big)^2=\alpha.d\big(T(\alpha a), T(a)\big) \leqq \alpha.d(\alpha a, \mathrm{a})=0$ d'où

$$T(\alpha a)=\alpha \cdot T(a)$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \big(T(a+b)-T(a)-T(b)\big)^2 &\leqq d\big(T(a+b), T(a)\big(\vee\ T^2(b) \\ &\leqq d(a+b, a) \vee\ T^2(b) \\ &\leqq b^2 \end{aligned}$$

Comme a et b jouent des rôles analogues, cette expression est inférieure ou égale à $a^2.b^2$ et par conséquent:

$$a \cdot b=0 \Rightarrow T(a+b)=T(a)+T(b)$$

---

[1]) $T^2(a)$ représente le carré de l'élément $T(a)$ de A; c'est encore $d(0, T(a))$.

Appliquons maintenant la propriété 18:

$$T(a)=\varepsilon_1(a)\cdot T(1)+\varepsilon_2(a)\cdot T(2)$$

d'où: $T(a)=a\left(T(2)-T(1)\right)+a^2\left(-T(2)-T(1)\right)$

Montrons que réciproquement toute transformation T:

$$T(a)=wa^2+ua+v\ ;\ v, u, w \text{ dans } A\ ,$$

est une contraction:

$$d\left(T(a), T(b)\right)=\left[w(a^2-b^2)+u(a-b)\right]^2=$$
$$=d(a,b)\cdot\left[w(a+b)+u\right]^2\leqq d(a,b)$$

Propriété 19:

Les contractions sont les transformations de la forme $m\to wm^2+$ $+um+v$; v, u, w étant des éléments de A.

Aspect matriciel

Soit T une contraction a 0 fixe: $T(m)=\varepsilon_1(m)\,.\,T(1)+\varepsilon_2(m)\,.\,T(2)$.
Appliquons la propriété 18 à $T(1)$ et $T(2)$

$$T(1)=\theta_{11}-\theta_{12}$$
$$T(2)=\theta_{21}-\theta_{22}$$

On obtient:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1\left(T(m)\right)\\ \varepsilon_2\left(T(m)\right)\end{pmatrix}=\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1(m)\\ \varepsilon_2(m)\end{pmatrix}$$

la matrice $\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}=\begin{pmatrix}\theta_{11}\ \theta_{21}\\ \theta_{12}\ \theta_{22}\end{pmatrix}$ étant à coefficients dans B avec les éléments de chaque colonne orthogonaux.

Réciproquement une matrice $\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}$ définit une application de A dans A pourvu que les deux éléments de $\left[\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}\,.\,\left(\begin{matrix}\varepsilon_1(m)\\ \varepsilon_2(m)\end{matrix}\right)\right]$ soient orthogonaux ce qui impose l'orthogonalité des éléments de chaque colonne pour $\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}$. On se ramène alors à la forme wm^2+um ce qui montre que la transformation définie par $\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}$ est une contraction.

Propriété 20:

Les contractions à 0 fixe sont définies par les matrices $\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}$ à coefficients dans B orthogonaux pour chaque colonne.

Supposons que $m\to wm^2+um+v$ soit une isométrie. L'appliquant au 1-triplet 0, 1, 2 on en tire les conditions nécessaires:

$$(w+u)^2=(-w+u)^2=u^2=1$$

c'est-à-dire $w=0$ et $u^2=1$.
Réciproquement toute contraction $m \to um+v$ avec $u^2=1$ conserve les distances.

Propriété 21 :

Les isométries sont les transformations de la forme:

$$m \to um+v; \text{ avec } v, u \text{ dans } A \text{ et } u^2=1 .$$

Aspect matriciel

On a une isométrie a point 0 fixe ssi $\begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix}$ est inversible. D'ailleurs d'après la propriété 21 elle doit être involutive. Elle est nécessairement de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\beta=0$.

Propriété 22 :

Les isométries à 0 fixe sont définies par les matrices $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec α, β idempotents tels que $\alpha\beta=0$; $\alpha+\beta=1$.

Remarque 13 :

L'isométrie $m \to um$ étant associée à la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, on a: $u=\alpha-\beta$.

Lemme : 3

L'ensemble des points m pour lesquels $\varepsilon_1(m)=\gamma$, γ fixé, est le cercle $\mathscr{C}_{(1,(1-\gamma))}$.
En effet:

$$1-\gamma=1-\varepsilon_1(m)=\delta_1(m)=d(1, m)$$

Propriété 23 :

Pour tous α, β, γ, de B tels que $\alpha\beta=0$ et $\alpha+\beta=1$, l'ensemble des points m vérifiant:

$$\alpha \,.\, \varepsilon_1(m)+\beta \,.\, \varepsilon_2(m)=\gamma \;;$$

est le cercle de centre $u=\alpha-\beta$ et de rayon $(1-\gamma)$.

Compte tenu de la remarque 13, l'ensemble des points m considéré se déduit par l'isométrie $m'=um$, de l'ensemble des points m' pour lesquels $\varepsilon_1(m')=\gamma$; d'après le lemme 3 c'est donc un cercle de rayon $(1-\gamma)$ et de centre u image de 1.

Propriété 24 :

Une contraction T est déterminée par la donnée d'un 1-triplet et de son image par T.

Soit T la contraction $m \to wm^2+um+v=m'$. Par hypothèse on donne a, b, c tels que $d(a, b)=d(b, c)=d(c, a)=1$, et leurs images par T : a', b', c'. On a donc:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse: « a, b, c est un 1-triplet », la matrice:

$$\mathscr{A}' = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & b^2-c^2-a^2 & c^2-a^2-b^2 \\ a-b-c & b-c-a & c-a-b \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{est inverse de } \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

ce qui détermine v, u, w.

Remarque 14 :

Compte tenu de la remarque 10, $\mathscr{A}'$ peut encore s'écrire:

$$\mathscr{A}' = \begin{pmatrix} -bc & -ca & -ab \\ -a & -b & -c \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en tire:

$$\begin{aligned} -v &= -a'bc - b'ca - c'ab \\ -u &= -aa' - bb' - cc' \\ -w &= -a' - b' - c' \end{aligned}$$

Définition 13 :

On appelle *affinité de rapport* $\alpha \in B$ une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est:

$$a'=a; \quad b'=b; \quad c'=(1+\alpha)\,b-\alpha a$$

Ainsi a et b sont invariants et l'image de c est l'unique point i_α du disque $\mathscr{D}^{ab}$ pour lequel $d(b, i_\alpha) = \alpha \,.\, d(a, i_\alpha)$ (propriété 12).

$$\cdot\, d(a, c')=1\,; \quad d(b, c')=\alpha\,; \quad d(c, c')=(1-\alpha)\,.$$

Appliquant les formules de la remarque 14 on détermine:

$$v = ab(b-a)(1-\alpha)$$
$$u = 1+(b-a)(1-\alpha)c$$
$$w = (b-a)(1-\alpha)$$

d'où: $m' = m + w(m^2 + cm + ab)$
ce qui s'écrit:

$$\boxed{m' = m - w \cdot (1 - d(c, m)), \quad avec \quad w = (b-a)(1-\alpha)} \qquad (6)$$

Repérons les points dans la base métrique: $\{a, c\}$.

$$d(c, m') = [(m-c) - w(1 - d(c, m))]^2$$
$$d(c, m') = d(c, m) + (1-\alpha)(1 - d(c, m))$$

$$\boxed{d(c, m') = (1-\alpha) + \alpha \cdot d(c, m)} \qquad (7)_c$$

$$d(a, m') = [(m-a) - w(1 - d(c, m))]^2$$
$$d(a, m') = d(a, m) + (1-\alpha)(1 - d(c, m))(1 + (b-a)(m-a))$$
$$d(a, m') = d(a, m) + (1-\alpha)(1 - d(c, m))(b-a)(m-c)$$

$$\boxed{d(a, m') = d(a, m)} \qquad (7)_a$$

Remarque 15 :

On voit (formules (7)) que les points invariants pour une affinité de rapport α définie par a, b, c et son image, vérifient:

$$d(c, m) = (1-\alpha) + \beta \qquad avec \ \beta \leqq \alpha$$

Il en résulte en particulier que α est un élément caractéristique pour la transformation considérée.

Définition 14 :

Une affinité de rapport nul est une *projection.*

Ainsi une projection est une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est:

$$a' = a \ ; \ b' = b \ ; \ c' = b$$

T étant une projection on a pour tout $m \in A$, repéré dans la base métrique $\{a, c\}$:

$$m \left| \begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ d(c, m) \end{array} \right. \xrightarrow{T} m' \left| \begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ 1 \end{array} \right. \xrightarrow{T} m'' \left| \begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ 1 \end{array} \right.$$

Compte tenu des formules (7) pour $\alpha = 0$, d'où:

Propriété 25 :

Toute projection est une contraction idempotente.

L'image de A est le cercle de centre c et de rayon 1 ; c'est aussi l'ensemble des points invariants.

Exemple :

La contraction définie par 0, 1, 2 et son image 0, 1, 1, ($a=a'=0$, $b=b'=1$, $c=2$, $c'=b$) est une projection

L'image de A est le cercle de centre 2 et de rayon 1 : c'est B. Elle est définie par $m'=m^2$.

Remarque 16 :

La propriété 15 montre que sur l'image de A par projection il n'existe pas de triplet équilatéral.

Remarque 17 :

On voit facilement que toute contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est a, a, a envoie tout point m en a.

Définition 15 :

Une application de A dans A est une *similitude de rapport* $\alpha \in B$ si pour tous m, n et leur image m', n' :

$$d(m', n') = \alpha d(m, n)$$

Ainsi une similitude de rapport α est une contraction. Elle transforme tout β-triplet en un $\alpha\beta$-triplet, tout cercle (resp : disque) de rayon ρ en un cercle (resp : disque) de rayon $\alpha \,.\, \rho$.

Considérons la similitude définie par $m'=wm^2+um+v$. L'image du 1-triplet a, b, c est un α-triplet : on a nécessairement $w=-a'-b'-c'$ (Remarque 14)
d'où $w=0$ (remarque 10)
Alors $u^2 \,.\, d(m, n)=d(m', n')$

Propriété 26 :

Les similitudes sont les transformations de la forme $m \to um+v$; le rapport est u^2.

Propriété 27 :

Une similitude T est déterminée par la donnée d'un 1-biplet et de son image par T.

En effet:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse $d(a, b) = 1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b^2 - ab & a^2 - ab \\ a - b & b - a \end{pmatrix}$$

est inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

CHERCHONS MAINTENANT LES POINTS INVARIANTS PAR UNE SIMILITUDE

Si m est invariant par la similitude $n \to un + v$:

$$m = um + v$$

multipliant successivement par $(1 - u^2)$, $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ on en tire respectivement:

$$(1 - u^2)\, m = (1 - u^2)\, v$$
$$\varepsilon_1(u) \cdot v = 0$$
$$\varepsilon_2(u) \cdot m = -\varepsilon_2(u) \cdot v$$

Ainsi sous la condition nécessaire $\varepsilon_1(u) \,.\, v = 0$, l'ensemble des points m invariants est donné par:

$m = (1 - u^2 - \varepsilon_2(u))\, v + \varepsilon_1(u) \cdot t\,, \quad t \in A$

c'est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u))v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

Propriété 28 :

La similitude $n \to un + v$ a des points invariants ssi $v \,.\, \varepsilon_1(u) = 0$. Dans cette hypothèse l'ensemble des points invariants est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u)).v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

Remarque 18 :

Toute similitude a un unique point invariant ssi $\varepsilon_1(u) = 0$; c'est $(1 + u^2)v$.

Définition 16 :

Une application de A dans A est une *homothétie de centre h et de rapport* $\alpha \in B$ lorsque pour tout m et son image m':

$$(m' - h) = \alpha (m - h)$$

Ainsi

$$m' = \alpha m + (1 - \alpha) h \tag{6}$$

Toute homothétie est une similitude. Réciproquement toute similitude $n \to \alpha n + v$ avec $\alpha v = 0$ est une homothétie de rapport α et de centre v.

On voit facilement que:

Propriété 29 :

Le produit d'une isométrie par une homothétie est une similitude. Toute similitude peut s'écrire comme un tel produit.

Définition 17 :

On appelle *symétrie à disque* toute isométrie involutive ayant des points invariants.

On sait (propriété 28) que sous la condition nécessaire $v \,.\, \varepsilon_1(u) = 0$ l'ensemble des points invariants par isométrie est le disque $\mathscr{D}_{(-v, \varepsilon 1(u))}$. Ceci étant une telle isométrie est involutive parce que $uv = -v$: c'est donc une symétrie à disque.

m, m' étant un biplet homologue par la symétrie à disque $n \to un + v$, soit i le milieu de mm'; on a:

$$d(-v, i) = (-v - i)^2 = m^2 (1 - u)^2 = m^2 \varepsilon_1 (u) \leqq \varepsilon_1 (u)$$

ce qui prouve que i est dans le disque des points invariants.

Propriété 30 :

Les symétries à disque sont les transformations de la forme:

$$m \to um + v \text{ avec } u^2 = 1, \quad v \,.\, \varepsilon_1(u) = 0 \,.$$

Le disque des points invariants est $\mathscr{D}_{(-v, \varepsilon 1(u))}$; il contient le milieu de deux points homologues.

Propriété 31 :

Toute isométrie peut s'écrire comme produit de deux symétries à disque. $m' = um + v$ s'obtient (par exemple) en composant: $m_1 = 2um$ puis $m' = 2m_1 + v$.

Définition 18 :

On appelle *symétrie à centre* toute isométrie involutive ayant un unique point invariant.

Ainsi une symétrie à centre est une symétrie à disque pour laquelle $\varepsilon_1(u)=0$ donc de la forme $m \to 2m+v$. L'unique point invariant est $2v$ et pour tout m on a:

$2v=-m-m'$ ce qui montre que $2v$ est au milieu de m, m'.

Propriété 32 :

Les symétries à centre sont les transformations de la forme $m \to 2m+v$. Le centre est $2v$; il est au milieu de tout biplet m, m', de points homologues.

On voit facilement que:

Propriété 33 :

i) Le produit de deux symétries à centre c_1 et c_2 est la translation de vecteur $2\,(c_2-c_1)$.

ii) Le produit de trois symétries à centre est une symétrie à centre.

RÉFÉRENCES

[1] BATBEDAT, A.: *Exposés*; Fac. Sc. Montpellier 1969.
[2] —— *p-anneaux*; Fac. Sc. Montpellier 1969.
[3] MELTER, R. A.: Contributions to Boolean Geometry of *p*-rings. *Pacific J. Math.* 1964.
[4] ZEMMER, J.: Some remarks on *p*-rings and their Boolean Geometry. *Pacific J. Math.* 1956.

(Recu le 11 mars 1971)

André Batbedat
Faculté des Sciences
34 Montpellier (France)