Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

DISTANCE BOOLÉENNE SUR UN 3-ANNEAU

par André BATBEDAT

INTRODUCTION

Dans [3] et [4] respectivement, R. A. MELTER et J. ZEMMER se sont intéressés à une géométrie booléenne sur un p-anneau.

Le travail ici présenté a été motivé par leurs articles; nous avons essayé de retrouver les principales propriétés de la géométrie classique dans le cas particulier des 3-anneaux (voir définition 2).

Pour les transformations ponctuelles l'adaptation est relativement aisée; par contre il ne semble pas que les notions de droite ou de segment conviennent dans cette théorie: c'est le disque qui s'impose...

Nous avons opté pour un exposé élémentaire afin que cet article soit accessible à tous les mathématiciens spécialistes de la question ou non. C'est ainsi que nous n'utilisons pas directement la notion de spectre pour un anneau et commençons par des rappels très développés concernant les anneaux booléens.

Tous les anneaux considérés sont unitaires.

Rappel :

Un *anneau booléen* $(B, \oplus, .)$, muni de la somme $\oplus$ et du produit $.$, est défini par:

« Pour tout $\alpha \in B$, $\alpha^2 = \alpha$ » (Tout élément est idempotent).

Par $(2\alpha)^2 = 4\alpha = 2\alpha$, on voit que B est de caractéristique 2. Par $(\alpha \oplus \beta)^2 = \alpha \oplus \beta$ il vient $\alpha\beta \oplus \beta\alpha = 0$: compte-tenu de ce qui précède, B est commutatif.

Considérons sur B la relation $\alpha\beta = \alpha$; elle est réflexive (idempotence), antisymétrique (commutativité) et transitive: c'est une relation d'ordre $\alpha \leq \beta$.

Puisque pour tout $\alpha \in B$, $\alpha 0 = 0$ et $\alpha 1 = \alpha$, 0 est le plus petit élément et 1 le plus grand.

Si ε est un minorant de γ et δ alors $\varepsilon\gamma = \varepsilon$ et $\varepsilon\delta = \varepsilon$ donc $\varepsilon\gamma\delta = \varepsilon$: ε minore $\gamma\delta$. Or $\gamma\delta\gamma = \gamma\delta$ et $\gamma\delta\delta = \gamma\delta$: $\gamma\delta$ est un minorant de γ et δ.

Ainsi pour tout couple (γ, δ) il existe un plus grand minorant $[\mathrm{Inf}\,(\gamma, \delta)]$ noté $\gamma \wedge \delta$: On dit que $(B, \leqq)$ est un inf-demi-treillis.

On vérifie de même que pour tout couple (γ, δ) il existe un plus petit majorant $[\mathrm{Sup}\,(\gamma, \delta)]$ noté $\gamma \vee \delta$, à savoir $\gamma \oplus \delta \oplus \gamma\delta$. On dit alors que $(B, \leqq)$ est un treillis.

Ce treillis est distributif parce qu'il en est ainsi des opérations $\wedge$ et $\vee$, l'une par rapport à l'autre; il est complémenté: pour tout $\alpha \in B$,

$$\alpha \wedge (1 \oplus \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \vee (1 \oplus \alpha) = 1 .$$

Comme exemple (classique) d'anneau booléen citons l'ensemble des parties d'un ensemble muni de la différence symétrique et de l'intersection: le inf et le sup correspondant respectivement à l'intersection et à la réunion.

Le seul anneau booléen intègre est $\mathbf{Z}_{/2}$ (et c'est un corps); en effet, avec $\alpha \,.\, (1 \oplus \alpha) = 0$, l'intégrité implique $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

Définition 1 :

Soit A un ensemble, B un anneau booléen et d une application de A^2 dans B telle que:

$$\begin{cases} \text{i)} \; d(a, b) = 0 \text{ ssi } ^{1)} \; a = b \\ \text{ii)} \; d(a, b) = d(b, a) \\ \text{iii)} \; d(a, b) \vee d(b, c) \geqq d(a, c) \end{cases}$$

pour tous a, b, c de A.
On dit que d est une *distance* (booléenne) sur A.

Exemple :

On vérifie que si $A = B$, $d(\alpha, \beta) = \alpha \oplus \beta$ est une distance sur B.

Définition 2 :

A est un *3-anneau* [2] si c'est un anneau vérifiant:
pour tout $a \in A$, $a^3 = a$ et $3a = 0$

Dans toute la suite A désigne un 3-anneau.

Exemple :

$(\mathbf{Z}/3)^n$ est un 3-anneau.

---

[1]) ssi: si et seulement si.
[2]) Les 3-anneaux sont étudiés dans: [1], *ensemble généralisé des parties d'un ensemble.*

Remarque 1 :

i) Dans A tout carré est idempotent ($a^4=a^2$).
On note B l'ensemble des idempotents.

ii) $a^2=0$ est équivalent à $a=0$

iii) $4a=a$ pour tout $a \in A$.

MONTRONS QUE TOUT 3-ANNEAU EST COMMUTATIF

Pour tout $a \in A$, tout $\alpha \in B$, $a=1.a=(1-\alpha)\,a+\alpha a$ d'où: $a\alpha=(1-\alpha)\,a\alpha+$ $+\alpha a\alpha$

De $[(1-\alpha)\,a\alpha)^2=0$ on tire (Remarque 1, ii)] $a\alpha-\alpha a\alpha=0$

De même $\alpha a-\alpha a\alpha=0$

et par conséquent $\alpha a=a\alpha$: on dit que les idempotents de A sont centraux.

Ainsi on a: $a\,(a^2+b)^2=(a^2+b)^2 a$ (Remarque 1, i))

Soit $a\,(a^2+a^2b+ba^2+b^2)=(a^2+a^2b+ba^2+b^2)a$

$$a+ab+aba^2+ab^2=a+a^2ba+ba+b^2a$$

$$2ab=2ba$$

d'où (Remarque 1, iii)): $\boxed{ab=ba}$ tous a, b, dans A.

Remarque 2 :

B, ensemble des idempotents de A, muni de la somme: $\alpha \oplus \beta=\alpha+\beta+\alpha\beta$ et du produit $\alpha\beta$ (produit dans A) est un anneau booléen.

Le sup et le inf s'expriment avec les opérations dans A:

$$\begin{cases} \gamma \wedge \delta = \gamma\delta \\ \gamma \vee \delta = \gamma+\delta-\gamma\delta \end{cases}$$

Lemme 1 :

Pour tous a, b, c de A, l'expression:

$$(a-b)^2 \vee (b-c)^2\,,$$

est symétrique en a, b, c.

En effet: $(a-b)^2=a^2+b^2+ab$ et par suite (remarque 2):

$$(a-b)^2 \vee (b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab\,.$$

Propriété 1 :

L'application d de A^2 dans B (Remarque 2) définie par:

$$d\,(a,b) = (a-b)^2\,.$$

est une distance (booléenne).