Aspect matriciel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$(w+u)^2=(-w+u)^2=u^2=1$$

c'est-à-dire $w=0$ et $u^2=1$.
Réciproquement toute contraction $m \to um+v$ avec $u^2=1$ conserve les distances.

Propriété 21 :

Les isométries sont les transformations de la forme:

$$m \to um+v; \text{ avec } v, u \text{ dans } A \text{ et } u^2=1 .$$

Aspect matriciel

On a une isométrie a point 0 fixe ssi $\begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix}$ est inversible. D'ailleurs d'après la propriété 21 elle doit être involutive. Elle est nécessairement de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\beta=0$.

Propriété 22 :

Les isométries à 0 fixe sont définies par les matrices $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ avec α, β idempotents tels que $\alpha\beta=0$; $\alpha+\beta=1$.

Remarque 13 :

L'isométrie $m \to um$ étant associée à la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, on a: $u=\alpha-\beta$.

Lemme : 3

L'ensemble des points m pour lesquels $\varepsilon_1(m)=\gamma$, γ fixé, est le cercle $\mathscr{C}_{(1,(1-\gamma))}$.
En effet:

$$1-\gamma=1-\varepsilon_1(m)=\delta_1(m)=d(1, m)$$

Propriété 23 :

Pour tous α, β, γ, de B tels que $\alpha\beta=0$ et $\alpha+\beta=1$, l'ensemble des points m vérifiant:

$$\alpha \,.\, \varepsilon_1(m)+\beta \,.\, \varepsilon_2(m)=\gamma \;;$$

est le cercle de centre $u=\alpha-\beta$ et de rayon $(1-\gamma)$.

Compte tenu de la remarque 13, l'ensemble des points m considéré se déduit par l'isométrie $m'=um$, de l'ensemble des points m' pour lesquels $\varepsilon_1(m')=\gamma$; d'après le lemme 3 c'est donc un cercle de rayon $(1-\gamma)$ et de centre u image de 1.

Propriété 24 :

Une contraction T est déterminée par la donnée d'un 1-triplet et de son image par T.

Soit T la contraction $m \to wm^2+um+v=m'$. Par hypothèse on donne a, b, c tels que $d(a, b)=d(b, c)=d(c, a)=1$, et leurs images par T : a', b', c'. On a donc:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse: « a, b, c est un 1-triplet », la matrice:

$$\mathscr{A}' = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & b^2-c^2-a^2 & c^2-a^2-b^2 \\ a-b-c & b-c-a & c-a-b \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{est inverse de } \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

ce qui détermine v, u, w.

Remarque 14 :

Compte tenu de la remarque 10, $\mathscr{A}'$ peut encore s'écrire:

$$\mathscr{A}' = \begin{pmatrix} -bc & -ca & -ab \\ -a & -b & -c \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en tire:

$$\begin{aligned} -v &= -a'bc - b'ca - c'ab \\ -u &= -aa' - bb' - cc' \\ -w &= -a' - b' - c' \end{aligned}$$

Définition 13 :

On appelle *affinité de rapport* $\alpha \in B$ une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est:

$$a'=a; \quad b'=b; \quad c'=(1+\alpha)\,b-\alpha a$$

Ainsi a et b sont invariants et l'image de c est l'unique point i_α du disque $\mathscr{D}^{ab}$ pour lequel $d(b, i_\alpha) = \alpha \,.\, d(a, i_\alpha)$ (propriété 12).

$$\cdot\, d(a, c')=1\,; \quad d(b, c')=\alpha\,; \quad d(c, c')=(1-\alpha)\,.$$

Appliquant les formules de la remarque 14 on détermine:

$$v = ab(b-a)(1-\alpha)$$
$$u = 1+(b-a)(1-\alpha)c$$
$$w = (b-a)(1-\alpha)$$

d'où: $m' = m + w(m^2 + cm + ab)$
ce qui s'écrit:

$$\boxed{m' = m - w \cdot (1 - d(c, m)), \quad avec \quad w = (b-a)(1-\alpha)} \qquad (6)$$

Repérons les points dans la base métrique: $\{a, c\}$.

$$d(c, m') = [(m-c) - w(1 - d(c, m))]^2$$
$$d(c, m') = d(c, m) + (1-\alpha)(1 - d(c, m))$$

$$\boxed{d(c, m') = (1-\alpha) + \alpha \cdot d(c, m)} \qquad (7)_c$$

$$d(a, m') = [(m-a) - w(1 - d(c, m))]^2$$
$$d(a, m') = d(a, m) + (1-\alpha)(1 - d(c, m))(1 + (b-a)(m-a))$$
$$d(a, m') = d(a, m) + (1-\alpha)(1 - d(c, m))(b-a)(m-c)$$

$$\boxed{d(a, m') = d(a, m)} \qquad (7)_a$$

Remarque 15 :

On voit (formules (7)) que les points invariants pour une affinité de rapport α définie par a, b, c et son image, vérifient:

$$d(c, m) = (1-\alpha) + \beta \qquad avec \ \beta \leqq \alpha$$

Il en résulte en particulier que α est un élément caractéristique pour la transformation considérée.

Définition 14 :

Une affinité de rapport nul est une *projection.*

Ainsi une projection est une contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est:

$$a' = a \ ; \ b' = b \ ; \ c' = b$$

T étant une projection on a pour tout $m \in A$, repéré dans la base métrique $\{a, c\}$:

$$m \left| \begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ d(c, m) \end{array} \right. \xrightarrow{T} m' \left| \begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ 1 \end{array} \right. \xrightarrow{T} m'' \left| \begin{array}{l} d(a, m) \\ \\ 1 \end{array} \right.$$

Compte tenu des formules (7) pour $\alpha = 0$, d'où:

Propriété 25 :

Toute projection est une contraction idempotente.

L'image de A est le cercle de centre c et de rayon 1 ; c'est aussi l'ensemble des points invariants.

Exemple :

La contraction définie par 0, 1, 2 et son image 0, 1, 1, ($a=a'=0$, $b=b'=1$, $c=2$, $c'=b$) est une projection

L'image de A est le cercle de centre 2 et de rayon 1 : c'est B. Elle est définie par $m'=m^2$.

Remarque 16 :

La propriété 15 montre que sur l'image de A par projection il n'existe pas de triplet équilatéral.

Remarque 17 :

On voit facilement que toute contraction pour laquelle il existe un 1-triplet a, b, c dont l'image est a, a, a envoie tout point m en a.

Définition 15 :

Une application de A dans A est une *similitude de rapport* $\alpha \in B$ si pour tous m, n et leur image m', n' :

$$d(m', n') = \alpha d(m, n)$$

Ainsi une similitude de rapport α est une contraction. Elle transforme tout β-triplet en un $\alpha\beta$-triplet, tout cercle (resp : disque) de rayon ρ en un cercle (resp : disque) de rayon $\alpha \,.\, \rho$.

Considérons la similitude définie par $m'=wm^2+um+v$. L'image du 1-triplet a, b, c est un α-triplet : on a nécessairement $w=-a'-b'-c'$ (Remarque 14)
d'où $w=0$ (remarque 10)
Alors $u^2 \,.\, d(m, n)=d(m', n')$

Propriété 26 :

Les similitudes sont les transformations de la forme $m \to um+v$; le rapport est u^2.

Propriété 27 :

Une similitude T est déterminée par la donnée d'un 1-biplet et de son image par T.

En effet:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse $d(a, b) = 1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b^2 - ab & a^2 - ab \\ a - b & b - a \end{pmatrix}$$

est inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

CHERCHONS MAINTENANT LES POINTS INVARIANTS PAR UNE SIMILITUDE

Si m est invariant par la similitude $n \to un + v$:

$$m = um + v$$

multipliant successivement par $(1 - u^2)$, $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ on en tire respectivement:

$$(1 - u^2)\, m = (1 - u^2)\, v$$
$$\varepsilon_1(u) \cdot v = 0$$
$$\varepsilon_2(u) \cdot m = -\varepsilon_2(u) \cdot v$$

Ainsi sous la condition nécessaire $\varepsilon_1(u) \,.\, v = 0$, l'ensemble des points m invariants est donné par:

$m = (1 - u^2 - \varepsilon_2(u))\, v + \varepsilon_1(u) \cdot t\,, \quad t \in A$

c'est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u))v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

Propriété 28 :

La similitude $n \to un + v$ a des points invariants ssi $v \,.\, \varepsilon_1(u) = 0$. Dans cette hypothèse l'ensemble des points invariants est le disque

$$\mathscr{D}_{[(1-u^2-\varepsilon 2(u)).v,\ \varepsilon 1(u)]}$$

Remarque 18 :

Toute similitude a un unique point invariant ssi $\varepsilon_1(u) = 0$; c'est $(1 + u^2)v$.