2. Questions d'existence

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Questions d'existence

2.1. *L'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$ *entraîne celle d'un* $[v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda]$.

Il suffit en effet de remplacer tout bloc B_j par $E - B_j$.

2.2. *L'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$ *entraîne, pour tout entier* t, *celle d'un* $[v, tb, tr, k, t\lambda]$.

Il suffit en effet de répéter t fois chaque bloc.

Mais il peut exister un $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ sans qu'il existe un $[v, b, r, k, \lambda]$. Ainsi il existe un [15, 42, 14, 5, 4] mais pas de [15, 21, 7, 5, 2].

2.3. *L'existence d'un* $[v, k, \lambda]$ *entraîne celle d'un* $[v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda]$.

B_1 étant un bloc du premier plan, le nouveau plan (appelé *résiduel* du premier relativement à B_1) est constitué, sur $E - B_1$, des blocs $B_j \cap (E - B_1)$ $(j = 2, \ldots, v)$.

Ainsi le résiduel d'un plan projectif d'ordre n est un plan affine d'ordre n.

Réciproquement on montre:

Pour $\lambda = 1$ *ou* 2, *tout* $[v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda]$ *est résiduel d'un* $[v, k, \lambda]$. Le problème de cette réciproque n'est pas résolu pour $\lambda \geqq 3$. Toutefois il existe un [12, 33, 28, 8, 14] mais pas de [34, 22, 14].

2.4. *L'existence d'un* $[v, k, \lambda]$ *(ou* $\lambda \geqq 2$*) entraîne celle d'un* $[k, v-1, k-1, \lambda, \lambda-1]$.

B_1 étant un bloc du premier plan, le nouveau plan (appelé *dérivé* du premier relativement à B_1) est constitué, sur B_1, des blocs $B_j \cap B_1$ $(j = 2, \ldots, v)$.

2.5. Mais le plus beau résultat relatif à l'existence des plans équilibrés est le théorème de Bruck — Ryser — Chowla — Shrikhande — Schutzenberger:

Pour qu'il existe un $[v, k, \lambda]$ (où naturellement, compte tenu de (1.3), $\lambda(v-1) = k(k-1)$) *il est nécessaire que*

— *si* v *est pair,* $(k-\lambda)$ *soit un carré parfait,*

— *si* v *est impair, l'équation* $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda y^2$ *ait une solution non nulle en nombres entiers.*

Ainsi il n'existe pas de [22, 7, 2] ni de [43, 7, 1].

2.6. Signalons aussi le résultat suivant (le cas $k = 2$ étant trivial):

Si $k = 3$ ou 4 les conditions nécessaires (1.3) *sont aussi suffisantes pour l'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$.

Mais cela n'est plus vrai à partir de $k = 5$: ainsi [15, 21, 7, 5, 2] et [36, 42, 7, 6, 1] n'existent pas.

2.7. La classification des solutions entières des équations (1.3) peut être faite soit par b croissants (car $b \geqq v > k$ et $b > r > \lambda$) soit — c'est la tradition — par r croissants (il n'existe en effet qu'un nombre fini de solutions aux équations (1.3) quand r est fixé). On trouvera dans [2] une telle classification pour $r \leqq 15$. On y a toujours $v \geqq 2k$ (compte tenu de (2.1)) et les $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ sont omis quand il existe un $[v, b, r, k, \lambda]$. Le nombre de plans dont l'existence est encore inconnue est important ([46, 69, 9, 6, 1] étant le plus «petit» de ceux-ci). Postérieurement à la parution de [2] certains de ces problèmes d'existence ont été résolus ([5], [7]) positivement: [56, 11, 2], [45, 12, 3], [36, 15, 6]. Signalons enfin une conjecture: v et k étant donnés (les équations (1.3) ont alors une infinité de solutions en b, r, λ) il existe toujours un $[v, b, r, k, \lambda]$ sauf peut-être dans un nombre fini de cas.

3. Questions d'« unicité »

3.1. Précisons d'abord ce qu'on entend par plans isomorphes.

Définition. — Deux $[v, b, r, k, \lambda]$ seront dits *isomorphes* si leurs matrices d'incidences A_1 et A_2 sont telles qu'il existe deux matrices de permutation P et Q, d'ordres v et b respectivement, vérifiant $A_1 = P A_2 Q$.

3.2. *Pour $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ il existe un seul plan projectif* (resp. *affine*) *d'ordre n.*

Mais ce n'est plus vrai pour $n = 9$. On conjecture toutefois l'unicité d'un tel plan pour n premier. Mais pour certaines valeurs de n primaire il existe au moins quatre plans projectifs (ou affines) d'ordre n non isomorphes deux à deux [3].

3.3. *Les plans pour lesquels $k = 3$* et $\lambda = 1$ (appelés triplets de Steiner) *sont uniques pour $v = 3, 7, 9$. Il y a deux solutions pour $v = 13$ et 80 solutions pour $v = 15$.* Le nombre de solutions est inconnu pour $v > 15$.