§1. DÉFINITIONS ET PRINCIPAUX RÉSULTATS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

par Jacques LESCA

§ 1. DÉFINITIONS ET PRINCIPAUX RÉSULTATS

1.1. *Définition d'une suite μ-équirépartie*

Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, μ une mesure de $M_1^+(X)$, l'ensemble des mesures de Borel régulières, positives, de norme 1. Soit $u = (u_n)$ une suite de points de X, nous dirons que u est μ-équirépartie si pour toute fonction f de $\mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ (ensemble des fonctions réelles continues à support compact), la limite de la suite $n \to 1/n \sum_{i=1}^{n} f(u_i)$ existe et vaut $\mu(f)$. (Voir [3])

1.2. *Caractérisation des suites μ-équiréparties*

Soit $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ l'ensemble de fonctions définies dans X et à valeurs complexes, boréliennes et bornées.

Soit $\mathscr{C}_b(X, \mathbf{C})$ le sous-ensemble des fonctions continues de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$.

Soient $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ le sous-ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann pour la mesure μ (en abrégé μ-$\mathscr{R}$-intégrable) c'est-à-dire des fonctions de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ dont l'ensemble des points de discontinuité ont une μ-mesure nulle, $\mathscr{R}'(X)$ le sous-ensemble de $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ constitué par les fonctions caractéristiques à support compact, fonctions caractéristiques d'ensembles bornés dont la frontière à une μ-mesure nulle (ensembles dits μ-$\mathscr{R}$-intégrables).

Nous dirons qu'une sous famille $\mathscr{F}$ de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ est *suffisante pour la mesure* μ si:

une suite $u = (u_n)$ est μ-équirépartie si et seulement si pour tout $f \in \mathscr{F}$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(u_i) \right) = \mu(f).$$

Théorème A. — Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini et $u = (u_n)$ une suite de points de X alors

(1) Les familles $\mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ (par définition), $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ et $\mathscr{R}'(X)$ sont suffisantes pour la mesure μ.

(2) Si en outre X possède une base topologique dénombrable $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ est la plus grande famille suffisante pour la mesure μ.

Rappelons qu'un espace localement compact possèdant une base topologique dénombrable est métrisable et par conséquent dénombrable à l'infini.

Théorème B. — Soit X un groupe abélien topologique localement compact. Alors la famille Γ de ses caractères continus est suffisante pour toute mesure μ.

1.3. *Existence de suites μ-équiréparties*

Par la suite nous supposons que X est un espace *topologique localement* compact *possédant une base dénombrable* et muni d'une mesure $\mu \in M_1^+(X)$; on désigne le tout par *espace-mesure* (X, μ).

Soit (X, μ) un espace-mesure. $X^{\mathbf{N}}$ désigne le produit d'une suite d'espaces identiques à X et $\mu^{\mathbf{N}}$ la « mesure produit » de mesures toutes identiques à μ.

La *Shift-Transformation* σ est l'application de $X^{\mathbf{N}}$ dans lui-même qui à $x = (x_1, x_2, \ldots)$ fait correspondre $\sigma(x) = (x_2, x_3, \ldots)$. Si $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ est une partie finie de $\mathbf{N}$, nous lui faisons correspondre X^J produit de r copies de X, X^J est muni de la mesure produit notée μ^J; (X^J, μ^J) est un *espace mesure*. La projection P_j: $X^{\mathbf{N}} \to X^J$ est définie par

$$P_j(x) = P_j((x_1, \ldots)) = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r})$$

P_j est une application continue et « mesure invariante ».

Théorème C. — Soient (X, μ) un *espace-mesure*, $u = (u_n)$ une suite croissante d'entiers et J une partie finie de $\mathbf{N}$.

Alors *pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout* $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$, la suite $n \to P_J(\sigma^{u_n}(x))$ est *μ^J-équirépartie dans X^J.*

Comme corollaire du Théorème C on obtient, en faisant $J = \{1\}$ et $u_n = n$: *$\mu^{\mathbf{N}}$-presque toute suite est μ-équirépartie.* En fait ce dernier résultat pourrait être déduit du *théorème ergodique individuel* (car σ est une applica-

tion *mélangeante* et par *conséquent ergodique*), ou alors encore plus simplement de *la loi forte des grands nombres.*

Si X est compact alors $(X^{\mathbf{N}}, \mu^{\mathbf{N}})$ est un espace-mesure.

Théorème D. — Si (X, μ) est un *espace-mesure* et si, en outre, X est *compact*, si (u_n) est une suite croissante d'entiers, alors, pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout x la suite $n \to \sigma^{u_n}(x)$ est $\mu_o^{\mathbf{N}}$*-équirépartie dans* $X^{\mathbf{N}}$.

(Il semble que, mis à part le cas ou $u_n = n$, le théorème D ne peut être déduit du théorème ergodique.)

1.4. *Espaces produit*

Soit (X, μ) et (Y, ν) deux espaces-mesures, considérons l'espace mesure $(X \times Y, \mu \times \nu)$. L'espace $\Omega = (X \times Y)^{\mathbf{N}}$ muni de la mesure $\tau = (\mu \times \nu)^{\mathbf{N}}$ est naturellement identifié à l'espace produit $X^{\mathbf{N}} \times Y^{\mathbf{N}}$ muni de la mesure produit $\mu^{\mathbf{N}} \times \nu^{\mathbf{N}}$.

Il résulte du théorème D que, pour τ- presque toute suite $((x_n, y_n))$ de $X^{\mathbf{N}} \times Y^{\mathbf{N}}$, la suite $n \to (x_n, y_n)$ est $\mu \times \nu$-équirépartie. Ce résultat est précisé par:

Théorème E. — Soient (X, μ), (Y, ν) deux *espaces-mesures* et $y = (y_n)$ une suite ν*-équirépartie dans* Y. Alors, pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$, la suite $n \to (x_n, y_n)$ est $\mu \times \nu$*-équirépartie dans* $X \times Y$.

Si Z est un espace localement compact et f: $X \times Y \to Z$ une application continue, la suite $n \to f(x_n, y_n)$ est alors équirépartie dans Z pour la mesure « image par f de $\mu \times \nu$ ». Utilisons cette dernière remarque, nous obtenons par exemple:

Si (y_n) est une suite de réels *équirépartie modulo* 1 au sens habituel: (la suite des images dans $\mathbf{R}/Z$ est *h-équirépartie*, h étant la mesure de Haar), alors la suite $u_n\, y_n$ est *équirépartie* modulo 1 pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque toute suite (u_n) d'entiers positifs, μ étant une *mesure quelconque* dans l'ensemble des entiers positifs.

A une sous-suite $(x_{\sigma(n)})$ d'une suite (x_n) faisons correspondre la fonction caractéristique de l'ensemble de ses indices $(\{\sigma(n) : n \in \mathbf{N}\})$. L'ensemble des sous-suites de (x_n) est ainsi *identifié* à l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ μ_α désigne la mesure définie dans $\{0, 1\}$ par $\mu_\alpha(\{1\}) = \alpha$.

Théorème F. — Soient (X, μ) un espace-mesure, (x_n) une suite *μ-équirépartie dans X* et α un nombre réel $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$.

Alors *$\mu_\alpha^{\mathbf{N}}$-presque toutes les sous-suites* de la suite x_n sont *μ-équiréparties dans X.*

1.5. *Généralisation*

Soit (X, μ) un espace-mesure. $A = (a_n^k)_{n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}^*}$ désigne une matrice infinie de nombres réels non négatifs. On dit qu'une suite $x = (x_n)$ de points de X est A-μ-équirépartie si, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C})$ la suite $n \to \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k f(u_k)$ qui existe, converge vers $\mu(f)$.

Supposons que pour tout *n la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k$ converge* et en outre que $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = 1$, alors les théorèmes A, B *se généralisent* sans difficultés pour la *A-μ-équirépartition.*

Si en outre il existe α positif tel que $\sup_{k=1}^{\infty} a_n^k = 0(n^{-\alpha})$, alors les théorèmes C, D et E et F *se généralisent pour la A-μ-équirépartition.*

§ 2. Première connexion de Galois

2.1. *Définitions*

Soit X un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini et $\mathscr{T}$ l'ensemble des topologies sur $M_1^+(X)$. Considérons la relation suivante entre une topologie τ de $\mathscr{T}$ et une application f de $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X, \mathbf{C})$: « *L'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour τ* ». Dans le cas où la relation est vraie nous écrivons $\tau \perp f$.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$ posons

$$B^* = \{\tau \in \mathscr{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Si T est une partie de $\mathscr{T}$ posons

$$T^* = \{f \in B : \forall \tau \in T, T \perp f\}.$$

(Les deux applications $B \to B^*$ et $T \to T^*$ sont abusivement notés de la même façon). Les images par ces applications sont dites *saturées* (de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ ou de $\mathscr{T}$).

Si on restreint ces applications aux saturés on a deux isomorphismes inverses de treillis, inverses l'un de l'autre.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$, alors B^* est un *intervalle initial fermé*, par exemple si $B = \mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ par définition $B^* = [v \to[$ est l'ensemble des topologies plus fines que la *topologie vague v.*