§3. Seconde connexion de Galois

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Si T est une partie de $\mathscr{T}$, T^* est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$ fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

Nous dirons qu'une partie B de $\mathscr{B}$ est *suffisante* si $B^* = \mathscr{C}_c^*$ ou si la topologie initiale dans M_1^+ correspondant à B est la topologie vague.

2.2. *Détermination de $\mathscr{C}_c^{**}$*

$\mathscr{C}_c^{**}$ est la plus grande partie de $\mathscr{B}$ telle que la topologie initiale correspondante est la topologie vague.

Proposition A. — Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini, alors:

$$\mathscr{C}_c^{**} = \mathscr{C}_b \, (= \mathscr{C}_b^{**})$$

Démonstration. Si $f \in \mathscr{C}_b$, d'après [Bourbaki [1], Proposition 9, p. 61] l'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour la topologie vague dans $M_1^+(X)$, et par conséquent $f \in \mathscr{C}_c^{**}$. Alors $\mathscr{C}_b \subset \mathscr{C}_c^{**}$ et

$$\mathscr{C}_b^{**} \subset \mathscr{C}_b^{**} . \tag{1}$$

Prouvons maintenant qu'une fonction de $\mathscr{C}_c^{**}$ est nécessairement continue. Soit f une fonction non continue au point $x_o \in X$. Alors il existe $c > 0$ tel que, dans tout voisinage de x_o il existe x tel que $|f(x) - f(x_o)| \geq c$.

A chaque voisinage V associons la famille $\varphi(V)$ des mesures de Dirac en chaque point x de V ou $|f(x) - f(x_o)| \geq c$. Alors $\varphi(V)$ est une base de filtre dans $\mathscr{T}$, filtre qui converge vers la mesure de Dirac au point x_o pour la topologie vague. L'image par l'application $\mu \to \mu(f)$ de cette base de filtre ne converge pas vers $\mu_o(f)$.

Il en résulte que f n'appartient pas à $\mathscr{C}_c^{**}$; on a donc

$$\mathscr{C}_c^{**} \subset \mathscr{C}_b . \tag{2}$$

Les inclusions (1) et (2) entraînent bien l'égalité des trois ensembles $\mathscr{C}_c^{**}$, $\mathscr{C}_b$, $\mathscr{C}_b^{**}$.

§ 3. Seconde connexion de Galois

3.1. *Définitions*

Fixons une mesure $\mu_o \in M_1^+(X)$ et introduisons la nouvelle relation entre une topologie $\tau \in \mathscr{T}$ et une application $f \in \mathscr{B}$: « l'application $\mu \to \mu(f)$

est continue au point μ_o pour la topologie τ »; relation qu'on écrit $\tau \perp f$. Pour une partie $B \subset \mathscr{B}$ posons

$$B^o = \{\tau \in \mathscr{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Pour une partie T de $\mathscr{T}$ posons

$$T^o = \{f \in B : \forall \tau \in T, \tau \perp f\}.$$

Les remarques écrites dans le paragraphe 2, à propos de l'application *, peuvent être reprises sans grand changement pour l'application o. Nous nous intéressons aux parties B de $\mathscr{B}$, telles que $B^o = \mathscr{C}_c^{oo}$ (les voisinages de μ_o pour la topologie initiale correspondante à B sont les mêmes que les voisinages de μ_o pour la topologie vague).

3.2. *Etude de $\mathscr{C}_c^{oo}$. Démonstration de la première partie du Théorème A*

Proposition B. — $\mathscr{C}_c^{oo} = \mathscr{R}^{oo}$.

Démonstration. D'après Bourbaki [[1] §5.3, proposition 7], si $f \in \mathscr{R} = \mathscr{R}(X, \mathbf{C})$, l'application $\mu \to \mu(f)$ est continue au point μ_o, si les applications $\mu \to \mu(g)$ sont continues au point μ_o pour tout $g \in \mathscr{C}_b$; où ce qui est équivalent d'après la proposition A, si les applications $\mu \to \mu(g)$ sont continues au point μ_o pour tout $g \in \mathscr{C}_c$. On a donc:

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{C}_c^{oo}.$$

On en déduit: $\mathscr{R}^{oo} \subset \mathscr{C}^{oooo} = \mathscr{C}^{oo}$. D'autre part, de $\mathscr{R} \supset \mathscr{C}_c$ on déduit $\mathscr{R}^{oo} \supset \mathscr{C}^{oo}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition C. — $\mathscr{C}^{oo} = \mathscr{R}' = \mathscr{R}'(X)$.

Démonstration. Puisque $\mathscr{R}'$ est inclus dans $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'^{oo} \subset \mathscr{R}^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo}$. Montrons que $\mathscr{R}'^{oo} \supset \mathscr{C}_c^{oo}$.

1) Soit h une fonction borélienne bornée, nulle en dehors d'un compact et qui vaut o, μ_o-presque partout, vérifions que h appartient à $\mathscr{R}'^{oo}$. Supposons $|h|$ bornée par $c \neq 0$, et majorons $\frac{1}{c} h$ par une fonction h' de $\mathscr{R}'$ qui est nulle μ_o-presque partout.

Pour toute mesure μ de M_1^+ on a $|\mu(h)| \leq \mu(h')$. Par hypothèse si τ est une topologie de $\mathscr{R}'^{oo}$, la fonction $\mu \to \mu(h')$ tend vers 0 quand μ tend vers μ_o pour la topologie τ.

Il en est de même des fonctions $\mu \to \mu\left(\frac{1}{c}h\right)$ et $\mu \to \mu(h)$.

2) Montrons que si $f \in \mathscr{C}_c$, alors $f \in \mathscr{R}'^{oo}$. Si $f \in \mathscr{C}^c$, l'ensemble des α tels que $\mu_o(f^{-1}(\{\alpha\}))$ n'est pas nul et est au plus dénombrable, son complémentaire est dense dans **R**. On en déduit que pour tout ε positif on peut trouver g, une combinaison linéaire finie, de fonctions de $\mathscr{R}$ et une fonction h, nulle en dehors d'un compact et qui vaut o μ_o-presque partout, telles que:

$$|f - (g+h)| \leq \varepsilon .$$

Puisque $\mathscr{R}'^{oo}$ est fermée pour la topologie de la convergence uniforme on en déduit que

$$f \in \mathscr{R}'^{oo} .$$

3) Puisque d'après 2), $\mathscr{C}_c \subset \mathscr{R}'^{oo}$ on a bien

$$\mathscr{C}_c'^{oo} \subset \mathscr{R}'^{oooo} = \mathscr{R}'^{oo} . \tag{0}$$

La première partie du théorème A est la conséquence du théorème C. La démonstration de la deuxième partie du théorème A est repoussée au §5.3.

3.3. *Cas des groupes abéliens. Démonstration du Théorème B*

Le théorème B est la conséquence de la proposition suivante (bien connu en théorie des probabilités quand le groupe X est le groupe additif des réels).

Proposition D. — Soient X un groupe *abélien localement compact*, Γ le groupe topologique de ses caractères continus et (μ_n) une suite de mesures de $M_1^+(X)$.

Si la suite $(\hat{\mu}_n)$ des transformées de Fourier-Sieltjès *converge ponctuellement* vers une fonction f et si f est *continue à l'origine*, alors la suite (μ_n) *converge* dans M_1^+, pour la *topologie vague*, vers une mesure dont la transformée de Fourier-Sieltjès est f.

Démonstration. 1) La sphère $\{\mu : \|\mu\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie vague v; de la suite μ_n on peut donc extraire une sous-suite $\mu_{\tau(n)}$ qui converge, pour v, vers une mesure μ qui est positive et de norme au plus égale à 1.

2) Démontrons que μ est de norme 1. Soit K un voisinage compact de 0 dans Γ et χ la fonction caractéristique de k. La fonction χ est intégrale

pour la mesure de Haar h dans Γ; définissons $\hat{\chi}: X \to \mathbf{C}$, par:

$$\hat{\chi}(x) = \int \gamma(x)\,\chi(\gamma)\,d\,h(\gamma)$$

$\hat{\chi}$ appartient à $C_o(X)$. Pour une mesure de Borel régulière v telle que $\| v \| < \infty$ on a

$$v(\hat{\chi}) = \int \hat{\chi}(x)\,dv(x) = \iint \gamma(x)\,\chi(\gamma)\,dh(\gamma)\,dv(x) = \int \chi(\gamma)\,\hat{v}(\gamma)\,dh(\gamma) \quad (1)$$

Puisque $\hat{\chi}$ appartient à $C_o(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_{\tau(n)}(\chi)) = \mu(\chi)$$

et en utilisant (1) on en déduit:

$$\lim_{n\to\infty} \int \chi(\gamma)\,\hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma)\,dh(\gamma) = \int \chi(\gamma)\,\hat{\mu}(\gamma)\,dh(\gamma)\,.$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient:

$$\int \chi(\gamma) f(\gamma)\,dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma)\,d\gamma\,,$$

et, par conséquent

$$\int_k f(\gamma)\,dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma)\,dh(\gamma)\,. \quad (2)$$

Les fonctions f et μ sont continues au point 0, on déduit de (2):

$$\hat{\mu}(0) = f(0) = 1\,.$$

La mesure μ, mesure positive, est de norme 1.

3) Démontrons que f est la transformée de Fourier-Stieltjès de μ et que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ. Il résulte de la proposition A que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma)$ converge vers $\mu(v)$, par conséquent, on a $f = \mu$. Comme l'application $\mu \to \hat{\mu}$ est injective on en déduit que la suite μ_n ne possède qu'un point d'accumulation μ; elle converge donc vers μ.

§ 4. Les espace-mesures

4.1. *Existence de familles suffisantes dénombrables*

Proposition D. — Si X est un *localement compact* et possède une *base* topologique dénombrable, alors il existe un sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ qui est à la fois *dénombrable*, *partout dense* dans $\mathscr{C}_c$ et *suffisant*. ($\mathscr{C}_c$ muni de la topologie de la convergence uniforme.)