# §5. Existence, propriétés des suites -équiréparties Image d'une suite -équirépartie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

telle que $\sup_{x \in X} \{ | g(x) - h(x) | \} \leq 1/4$. Soit $a$, $b$ appartenant à $D_p$ tels que $1/4 \leq a < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < b$ et soit l'élément de $M'$, $f^{-1}(]a, b[)$; c'est un ouvert contenant $x$ et inclus dans $U$.

Montrons maintenant que $\mathfrak{M}'$ est suffisante pour la mesure $\mu$. Désignons par $\mathfrak{M}$, la famille des fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{M}$. Puisque $\mathfrak{M} \subset \mathscr{R}'$ on a

$$\mathfrak{M}^{oo} \subset \mathscr{R}'^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo} \tag{1}$$

D'autre part si $M$ appartenant à $\mathscr{G}$, $M = \theta_f \cap f^{-1}(]a, b[)$, $M$ est inclus dans une suite d'éléments $M_n \in \mathscr{G}_f$ tels que:

$$M_n \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b]) \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b[) .$$

On en déduit que la fonction caractéristique de

$$\theta_f \cap f^{-1}([a, b[) ,$$

appartient à $\mathfrak{M}^{oo}$.

Comme $\mathfrak{M}^{oo}$ est une algèbre fermée pour la topologie de la convergence uniforme, il est clair que $\mathscr{F}$ est inclus dans $\mathfrak{M}^{oo}$. On en déduit

$$\mathscr{F}^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo} \subset \mathfrak{M}^{oooo} = \mathfrak{M}^{oo} . \tag{2}$$

Le fait que $\mathfrak{M}'$ est une famille suffisant pour la mesure $\mu$, est une conséquence de (1) et (2).

## § 5. Existence, propriétés des suites $\mu$-équiréparties Image d'une suite $\mu$-équirépartie

### 5.1. *Démonstration du Théorème C*

*Image d'une suite $\mu$-équirépartie*

Il est clair, puisque $X^J$ est à base dénombrable, qu'il suffit de démontrer pour $f \in \mathscr{B}(X^J, \mathbf{R})$ que pour $\mu_o^{\mathbf{N}}$-presque tout $x$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(P_J(\sigma^{u_i}(x))) = \mu^J(f) .$$

Nous pouvons supposer que $\mu^J(f) = 0$. Posons

$$a_i = a_i(x) = (P_J(\sigma^{u_i}(x))) \quad et \quad v_n = v_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

1) Notre première étape va consister à majorer la mesure $\mu_o^{\mathrm{N}}$ de l'application $x \to v_{n^2}(x)$. Il est clair que $\mu(v_n) = 0$; il est clair d'autre part que si $|p-q| \geqq \mathrm{Max}\{n_1 - n_2 : n_1, n_2 \in J\} = r$ les deux applications $a_p$ et $a_q$ de $X^{\mathrm{N}}$ dans $X^J$ sont indépendantes. (Pour deux parties mesurables $A_p$ et $A_q$ de $X^J$ on a alors $\mu^{\mathrm{N}}(a_p^{-1}(A_p) \cap a_p^{-1}(A_q)) = \mu^{\mathrm{N}}(a_p^{-1}(A_p))\,\mu^{\mathrm{N}}(a_p^{-1}(A_q)))$ et, par conséquent, $\mu^J(a_p . a_q) = \mu^J(a_p)\,\mu^J(a_q) = 0$.

On déduit de là, en posant $m = \mathrm{Max}\{|f(y)| : y \in X^J\}$ :

$$\mu^{\mathrm{N}}\Big(\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} f(a_p) f(a_q)\Big) \leqq m^2 \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n \\ |p-q| \leq r}} 1 \leqq 2m^2 n .$$

On en déduit: $\mu^{\mathrm{N}}(v_{n^2}) \leqq 2m^2/n$.

2) Utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychef, nous obtenons une majoration de la mesure de l'ensemble:

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X^{\mathrm{N}} : |v_n(x)| \geqq \varepsilon\} : \mu^{\mathrm{N}}(A_n) \leqq \frac{2m^2}{\varepsilon^2}\, 1/n = 0(1/n)\,(n \to \infty).$$

3) On en déduit que la sous-suite $n \to v_{n^2}(x)$ converge vers 0 pour presque tout $x$. En effet, l'ensemble

$$\limsup_{n \to \infty}(A_n(\varepsilon)) = \{x : \limsup_{n=\infty} |v_{n^2}(x)| > \varepsilon\} = \bigcap_{s \in \mathrm{N}} \bigcup_{n^2 < s} A_{n^2}(\varepsilon)$$

a pour mesure 0 quel que soit $\varepsilon > 0$.

4) Prouvons enfin que si $v_{n^2}$ converge vers 0, la suite $v_n$ converge vers 0. Soit, pour $n \in \mathrm{N}$, l'entier $r$ défini par: $r^2 \leqq n < (r+1)_2$, alors

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{r^2}{n} - \frac{1}{r^2}\Big(\sum_{i=1}^{r^2} a_i\Big) + \frac{1}{n}\sum_{r^2}^{n} a_i \tag{1}$$

$\Big|\sum_{r^2}^{n} a_i\Big| \leqq m((r+1)^2 - r^2)$, et, par conséquent, $\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{r^2}^{n} a_i$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$; $\frac{r^2}{\mathrm{n}}$ tend vers 1 quand $n$ tend vers $+\infty$. On déduit de (1) que si $v_{n^2}$ tend vers 0 quand $r$ tend vers $+\infty$, $v_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

5.2. *Démonstration du Théorème D*

Soit $(X, \mu)$ un espace mesure, $X$ compact. Nous devons prouver que pour $\mu^{\mathrm{N}}$-presque tout point $x \in X^{\mathrm{N}}$, et pour toute partie $S$ de $X^{\mathrm{N}}$ qui est $\mu^{\mathrm{N}}$-$\mathscr{R}$-intégrable

$$\lim_{n\to\infty} \Pi(v; S, n)/n = \mu_o^{\mathrm{N}}(S), \tag{1}$$

la suite $v$ étant définie par $v_n = \sigma^n(x)$.

Posons $J_p = \{1, 2, ..., p\}$. Il résulte du théorème 3.A que, pour tout $p$ et pour $\mu_o^{\mathrm{N}}$-presque tout $x \in X^{\mathrm{N}}$ la suite $n \to P_{J_p}(\sigma^{u_n}(x))$ est $\mu^{J_p}$-équirépartie dans $X^{J_p}$. Montrons que cette dernière assertion est équivalent à « $\sigma^{u_n}(x)$ $\mu^{\mathrm{N}}$-équirépartie dans $X^{\mathrm{N}}$ ».

Soit, en effet, $(v_n)$ une suite de points de $X^{\mathrm{N}}$ telle que pour tout $p$, $P_{J_p}(v_n)$ est $\mu^{J_p}$-équirépartie dans $X^{J_p}$; montrons tout d'abord que si $K$ est un compact de $X^{\mathrm{N}}$ on a:

$$\limsup_{n\to\infty} \{\Pi(v; K, n)/n\} \leqq \mu^{\mathrm{N}}(K). \tag{2}$$

Posons $F_k = P_{J_k}^{-1}(P_{J_k}(K))$; $K$ étant fermé, il est l'intersection de $F_k$. Pour $\varepsilon$ positif, on peut donc choisir $k$ de telle sorte que

$$\mu^{\mathrm{N}}(F_k) \leqq \mu^{\mathrm{N}}(k) + \varepsilon/2.$$

Par ailleurs $P_{J_k}(K)$ est fermé et puisque $X^{J_k}$ est normal il existe un ensemble $L$, $\mu^{J_k}$-$\mathscr{R}$-intégrable, qui le contient et tel que

$$\mu^{J_k}(L) \leqq \mu^{J_k}(P_{J_k}(K)) + \varepsilon/2.$$

Si $M = P_{J_k}^{-1}(N)$, il est clair que $M$ contient $K$, que $\mu^{\mathrm{N}}(M) \leqq \mu(K) + \varepsilon$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \{\Pi(v; M; n)/n\} = \mu^{\mathrm{N}}(M).$$

La relation (2) s'en déduit.

Pour obtenir (1) pour une partie $\mu^{\mathrm{N}}$-$\mathscr{R}$-intégrable quelconque, il suffit d'utiliser la relation (2), d'une part pour l'adhérence de $F$. d'autre part pour le complémentaire de l'intérieur de $F$.

5.3. *Suites adjacentes — Fin de la démonstration du Théorème A*

Soit $X$ un espace métrique (distance notée $d$). On dit que deux suites $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ sont *adjacentes* si $d(u_n, v_n)$ tend vers la limite 0 quand $n$

tend vers l'infini. Dans un tel espace une fonction continue à support compact est uniformément continue. Et par conséquent:

*Proposition F.* — Soient $(X, \mu)$ un espace-mesure. Si deux suites sont *adjacentes* pour une distance $d$ dont la topologie est équivalente à celle de $X$, si *l'une est $\mu$-équirépartie il en est de même de l'autre.*

La seconde partie du théorème A est une conséquence du résultat: « Si $X$ possède une base dénombrable, $\mathscr{C}^{oo} = \mathscr{R} = \mathscr{R}^{oo}$ », conséquence de la proposition B et de la proposition suivante.

*Proposition G.* — Si $(X, \mu)$ est un espace-mesure, alors

$$\mathscr{C}_c^{oo} \subset \mathscr{R} .$$

Démonstration. Montrons que si $f \in \mathscr{B}(X, \mathbf{R})$ n'est pas $\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, alors $f$ n'appartient pas à $\mathscr{C}_c^{oo}$.

Si $f$ n'est pas $\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, il existe un nombre positif $a$ et une partie borelienne $M$ de $X$ de mesure positive, tels que pour tout $m \in M$

$$\limsup_{x \to m} f(x) - \liminf_{x \to m} f(x) > a .$$

Soit $u = (u_n)$ une suite de points de $X$ qui est $\mu_o$-équirépartie et telle que, si $\chi$ désigne la fonction caractéristique de $M$

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi(u_i) = \mu_o(\chi) = \mu_o(M) \tag{1}$$

(c'est dire que la « densité » des points de la suite qui appartiennent à $M$ égale $\mu_o(M)$. Une telle suite existe; pour s'en rendre compte, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3.A en « ajoutant » à la famille « suffisante » pour $\mu_o$, dénombrable, la fonction $\chi$.

Un espace localement compact à base dénombrable est métrisable. Soit $d$ une métrique dont la topologie est équivalente à celle de $x$. A partir de la suite $u$, construisons deux suites $u'$ et $u''$ définies ainsi:

Si $u_n \notin M$ on prend $u'_n = u''_n = u_n$.

Si $u_n \in M$ on prend $u'_n$ et $u''_n$ vérifiant:

$$d(u_n, u'_n) \leqq 1/n , \quad d(u_n, u''_n) \leqq 1/n$$
$$f(u'_n) - f(u''_n) \geqq a .$$

Il est clair que les suites $u'$ et $u''$ sont équirépartie. D'autre part, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u'_i) - \frac{1}{n}\sum f(u''_i) > \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(u_i)\,;$$

les deux suites

$$n \to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u'_i) \qquad et \qquad n \to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u''_i)$$

ne peuvent tendre toutes les deux vers $\mu_o(f)$ puisque

$$\lim \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(u_i) = a\,\mu_o(M)\,.$$

5.4. *Image d'une suite équirépartie*

Soient $X$, $Y$ deux espaces localement compacts et $f$: $X \to Y$ une application borélienne. Si $\mu$ est une mesure sur $X$ son image par $f$ est une mesure notée $f\mu$ $(f\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)))$.

Nous obtiendrons

*Proposition H.* — Soient $(X, \mu)$ un « espace-mesure », $Y$ un espace topologique localement compact et $f$: $X \to Y$ une application borélienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour toute fonction $g \in \mathscr{C}_c(Y, \mathbf{C})$, $g \circ f$ est $\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable.

(b) Pour toute fonction $g$, $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, $g \circ f$ est $\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable.

(c) Pour toute fonction $g$ caractéristique d'une partie de $Y$, $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, $g \circ f$ est $\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable.

(d) Pour toute suite $u = (u_n)$ de points de $X$ qui est $\mu$-équirépartie son image $fu = (f(u_n))$ est $f\mu$-équirépartie.

Démonstration. Les implications schématisées par:

$$\begin{array}{ccc} (b) & \Rightarrow & (a) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (c) & \Rightarrow & (d) \end{array} \quad \text{sont évidentes}$$

Prouvons, pour achever la démonstration:

$$\text{non (b)} \quad \Rightarrow \quad \text{non (d)}\,.$$

Soit $g$ et $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable telle que $g \circ f$ n'est pas $\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable. Mais d'après la proposition G, il existe une suite de points de $X$, $u$ qui est $\mu$-équirépartie et telle qu'on n'a pas

$$\lim \sum g\left(f(u_i)\right) = \mu(g \circ f) = f\mu(g)\,.$$

La suite $fu$ n'est pas $f\mu$-équirépartie.

5.5. *Suites uniformément équirépartie*

Soient $(X, \mu)$ un espace mesure et $u = (u_n)$ une suite de points de $X$.

Nous dirons que la suite $u$ est *uniformément $\mu$-équirépartie*, si, pour toute partie $M$, $\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, la suite $n \to \Pi(M; N, N+n)/n$ converge vers $\mu(M)$, uniformément par rapport à $N$.

Existe-t-il toujours des suites uniformément réparties dans un espace mesure $(X, \mu)$? Si $X$ est un groupe abélien compact monothétique, et $\mu$ la mesure de Haar dans $X$ la réponse est oui. Il est clair aussi que si $(X, \mu)$ et $(Y, \nu)$ sont des espaces si $f$: $X \to Y$ conserve la mesurabilité et est telle que pour toute partie mesurable $A$ de $Y$, $\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \nu(A)$; s'il existe une suite de points de $X$ uniformément $\mu$-équirépartie, son image par $f$ est une suite de points de $Y$ uniformément-$\nu$-équirépartie.

Si $\mu$ est mesure de Dirac $\delta_a$, la suite $u_n = a$ est uniformément $\mu$-équirépartie, c'est dire que $\mu^{\mathbf{N}}$-presque toutes les suites sont uniformément équiréparties Cependant

*Proposition I.* — Si $(X, \mu)$ est un « espace mesure » et si $\mu$ n'est pas une mesure de Dirac, alors pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ la suite $(x_n)$ *n'est pas uniformément $\mu$-équirépartie.*

Démonstration. Nous mettrons en évidence l'existence d'une partie $D$ de $X^{\mathbf{N}}$ qui ne contient aucune suite uniformément $\mu$-équirépartie et dont la mesure $\mu^{\mathbf{N}}$ est 1.

Soit $A$ un ensemble $\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable tel que $0 < \mu(A) < 1$. Il résulte de la démonstration du théorème C que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour $\mu$-$^{\mathbf{N}}$presque

tout $x = x_1, x_2, \ldots$, la propriété $\mathscr{P}(k, n)$: $x_{k+1} \in A$, $x_{k+2} \in A, \ldots, x_{k+n} \in A$ a la fréquence égale à $(\mu(A))^{n_o}$. On en déduit que l'ensemble $D$ des $x \in X^{\mathrm{N}}$ tels que pour tout $n$ il existe $k$ de telle sorte qu'on ait la propriété $\mathscr{P}(k, n)$ est un ensemble de mesure 1.

$D$ ne contient aucune suite uniformément $\mu$-équirépartie car pour une telle suite il existe $n_o$ pour lequel la propriété $\mathscr{P}(k, n_o)$ n'a jamais lieu.

## 5.6. *Conditions minimales d'équirépartition*

On peut, dans certains cas déterminer des familles $B$ de fonctions fournissant un système de conditions nécessaires et suffisantes pour l'équirépartition d'une suite, familles qui sont *minimales.*

*Proposition E.* — Soient $X$ un groupe abélien *compact*, $\Gamma$ le groupe de ses caractères continus et $\Gamma'$ un sous-ensemble de $\Gamma$ tel que

— Le caractère trivial n'appartient pas à $\gamma'$.

— Si $\gamma$ est un caractère non trivial et $\bar{\gamma}$ son caractère conjugué, un et un seul des deux caractères $\gamma$, $\bar{\gamma}$ appartient à $\Gamma'$.

Alors $\Gamma'$ est une partie *suffisante pour la mesure de Haar h, qui est minimale.*

Démonstration. Il est clair que $\Gamma'$ est une partie suffisante pour la mesure $h$ puisque $\Gamma$ est une partie suffisante pour la mesure $h$. Considérons $\gamma_o \in \Gamma'$ et $\Gamma'' = \Gamma' - \{\gamma_o\}$. $\Gamma''$ n'est pas une partie suffisante de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$; en effet, nous allons vérifier qu'il existe une mesure $\mu$, distincte de la mesure de Haar $h$ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma''$, $\hat{\mu}(\gamma) = \hat{h}(\gamma)$. Alors comme il existe une suite $u$, $\mu$-équirépartie, cette suite vérifie la condition $\lim \frac{1}{N} \Sigma\, \gamma(u_n) = h(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma''$, elle n'est pas cependant $h$-équirépartie.

Considérons en effet la mesure $\nu$ définie à l'aide de la fonction réelle positive $\frac{1}{2}(\gamma_o + \bar{\gamma}_o)$ ($\bar{\gamma}_o$ est le conjugué de $\gamma_o$) $\left(d\nu = \frac{1}{2}\left(\gamma_o(x) + \bar{\gamma}_o(x)\right) dh(x)\right)$ alors on vérifie facilement que

$$\mu = h + \nu$$

est telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = \hat{h}(\gamma) = 0 \quad (\gamma \in \Gamma''),$$

tandis que

$$\hat{\mu}(\gamma_o) = \hat{h}(\gamma_o) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

## § 6. Espaces produit

### 6.1. *Familles suffisantes dans un espace produit*

*Proposition F.* — Soient $(X, \mu)$, $(Y, \nu)$ deux espaces-mesures et $\mathscr{U}$ [resp. $\mathscr{V}$] une famille d'ouverts de $X$, *dénombrable* et *suffisante* pour la mesure $\mu$ [resp. $\nu$], base topologique de $X$ [resp. $Y$]. Alors $\mathfrak{M} = \{ U \times V : U \in \mathscr{U}, V \in \mathscr{V} \}$ est une *base topologique dénombrable* de $X \times Y$, *suffisante pour la mesure* $\mu \times \nu$.

Démonstration. $\mathfrak{M}$ est une base dénombrable de $X \times Y$, montrons qu'elle est suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$. Soit une suite $u = (u_n)$ de points de $X \times Y$ telle que pour tout $M = U \times V \in \mathfrak{M}$ :

$$\lim_{n \to \infty} \{ \Pi(M, n)/n \} = \mu U \cdot \nu V = \mu \times \nu(M). \tag{1}$$

Il est clair que la relation (1) reste vraie pour l'algèbre de Boole engendrée par la famille $\mathfrak{M}$ et en particulier, qu'elle est vraie lorsqu'on remplace $M$ par une union finie d'éléments de la famille $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X \times Y$. $\mathcal{O}$ est couvert par les éléments de la famille $\mathfrak{M}$ qui sont inclus dans $\mathcal{O}$. Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une union finie $S$ d'éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $S > 0$ et $\mu(\mathcal{O} - S) \leqq \varepsilon$. On en déduit que:

$$\liminf_{n \to \infty} \{ \Pi(\mathcal{O}; n)/n \} = \mu \times \nu(\mathcal{O}). \tag{2}$$

Si enfin $A$ est une partie de $X \times Y$ dont la frontière est de mesure nulle, on déduit, de la propriété précédente appliquée d'une part à l'intérieur de $A$ et d'autre part à l'intérieur de son complémentaire:

$$\lim_{n \to \infty} \big(\Pi(A; n)/n\big) = \mu \times \nu(A).$$

La famille $\mathfrak{M}$ est donc bien suffisante pour $\mu \times \nu$.

### 6.2. *Démonstration du Théorème E*

Utilisons $\mathscr{U}$ [resp. $\mathscr{V}$] une famille dénombrable *suffisante* pour la mesure $\mu$ [resp. $\nu$]. Pour qu'une suite $u_n = (x_n, y_n)$ soit $\mu \times \nu$ équirépartie, il faut et il