Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1971)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

Autor: Lesca, Jacques

Kapitel: §6. Espaces produit

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44585

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

tandis que

$$\hat{\mu}(\gamma_o) = \hat{h}(\gamma_o) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

§ 6. Espaces produit

6.1. *Familles suffisantes dans un espace produit*

Proposition F. — Soient (X, μ), (Y, ν) deux espaces-mesures et $\mathscr{U}$ [resp. $\mathscr{V}$] une famille d'ouverts de X, *dénombrable* et *suffisante* pour la mesure μ [resp. ν], base topologique de X [resp. Y]. Alors $\mathfrak{M} = \{ U \times V : U \in \mathscr{U}, V \in \mathscr{V} \}$ est une *base topologique dénombrable* de $X \times Y$, *suffisante pour la mesure* $\mu \times \nu$.

Démonstration. $\mathfrak{M}$ est une base dénombrable de $X \times Y$, montrons qu'elle est suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$. Soit une suite $u = (u_n)$ de points de $X \times Y$ telle que pour tout $M = U \times V \in \mathfrak{M}$:

$$\lim_{n \to \infty} \{ \Pi(M, n)/n \} = \mu U \cdot \nu V = \mu \times \nu(M). \tag{1}$$

Il est clair que la relation (1) reste vraie pour l'algèbre de Boole engendrée par la famille $\mathfrak{M}$ et en particulier, qu'elle est vraie lorsqu'on remplace M par une union finie d'éléments de la famille $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X \times Y$. $\mathcal{O}$ est couvert par les éléments de la famille $\mathfrak{M}$ qui sont inclus dans $\mathcal{O}$. Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une union finie S d'éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $S > 0$ et $\mu(\mathcal{O} - S) \leqq \varepsilon$. On en déduit que:

$$\liminf_{n \to \infty} \{ \Pi(\mathcal{O}; n)/n \} = \mu \times \nu(\mathcal{O}). \tag{2}$$

Si enfin A est une partie de $X \times Y$ dont la frontière est de mesure nulle, on déduit, de la propriété précédente appliquée d'une part à l'intérieur de A et d'autre part à l'intérieur de son complémentaire:

$$\lim_{n \to \infty} \big(\Pi(A; n)/n\big) = \mu \times \nu(A).$$

La famille $\mathfrak{M}$ est donc bien suffisante pour $\mu \times \nu$.

6.2. *Démonstration du Théorème E*

Utilisons $\mathscr{U}$ [resp. $\mathscr{V}$] une famille dénombrable *suffisante* pour la mesure μ [resp. ν]. Pour qu'une suite $u_n = (x_n, y_n)$ soit $\mu \times \nu$ équirépartie, il faut et il

suffit que pour tout $V \in \mathscr{V}$ la suite des indices (n_i) tels que $y_n \in V$ ait la fréquence $v(V)$, et que, la sous suite $i \to x_{n_i}$ soit μ-équirépartie dans X.

Or par hypothèse, la première condition est remplie. v fixé, la seconde condition l'est pour μ^{N}-presque tout $x = (x_n)$ de X^{N} d'après le théorème 3.A.

Puisque la famille $\mathscr{V}$ est dénombrable, la fin de la preuve est immédiate.

6.3. *Démonstration du Théorème F*

Soit a un point arbitraire de X. Définissons l'application continue f de $\{0, 1\} \times X$ dans X par

$$f(0, x) = a \qquad f(1, x) = x\,.$$

La fonction f est continue et l'image par f de la mesure $v = \mu_\alpha \times \mu$ est la mesure $f(v) = (1-\alpha)\,\delta_a + \alpha\mu$, où δ_a désigne la mesure de Dirac au point a.

Alors d'après le théorème E, $(\mu_\alpha)^{\mathrm{N}}$-presque toutes les suites (y_n) de $(0, 1)^{\mathrm{N}}$ sont telles que (y_n, x_n) est v-équirépartie, et par conséquent la suite $n \to f(y_n, x_n)$ est $f(v)$-équirépartie.

D'autre part, pour μ_α^{N}-presque toute suite (y_n), o a la « fréquence » $1 - \alpha$. On déduit des deux derniers résultats, que pour μ_α^{N}-presque sous-suite de x_n est μ-équirépartie dans X; on vérifie, facilement, en effet, que si une suite est v-équirépartie et qu'elle contient une sous-suite de densité $1 - \alpha$, δ_a équirépartie, la sous-suite constituée par les « termes restants » est μ-équirépartie.

RÉFÉRENCES

[1] Bourbaki, N., *Intégration*, chap. IX.
[2] —— *Topologie générale*, chap. X.
[3] Helmberg, H., *Math. Zeitschr. 86*, pp. 157-189 (1964).

(Reçu le 1er juin 1971)

J. Lesca
Faculté des Sciences de Bordeaux
351, cours de la Libération
F-33 — Talence