Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSIFICATION DES FORMES TRILINÉAIRES ALTERNÉES EN DIMENSION 6

Autor: Capdevielle, Bernadette

Kapitel: II. Etude de $\sum_{n,5}^3 \quad (k = R ou C)$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45374

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

5.5 — Soient D et D' deux droites distinctes de E, telles que $\tilde{\omega}_D$ et $\tilde{\omega}_{D'}$ soient décomposables; si H_D et $H_{D'}$ sont confondus, le rang de ω est strictement inférieur à 6.

En effet, il suffit de choisir dans H_D un sous-espace F de dimension 3 ne contenant ni D ni D'. D'après la remarque 5.3, il existe un élément ω_1 de $\wedge^3 F$ tel que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D), \ \omega - \lambda\omega_1 \in I(D') \qquad \text{où} \qquad \lambda \in k$$

donc

$$(1-\lambda)\,\omega_1 \in I(D) + I(D')$$

donc

$$1 - \lambda = 0 \quad \text{et}$$
$$\omega - \omega_1 \in I(D) \cap I(D')$$

et par conséquent, le rang ne peut être plus grand que 5.

II. Etude de $\Sigma^3_{n,5}$ ($k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)

1. Proposition

Pour tout ω élément de $\wedge^3 E$, E de dimension 5, il existe une droite $\Delta \subset E$, telle que ω soit un élément de $I(\Delta)$.

Démonstration. — Soit D une droite quelconque. Si $\omega \notin I(D)$, $\tilde{\omega}_D$ est un élément décomposable non nul de $\wedge^3 E/D$; soit alors D' une droite supplémentaire de H_D dans E. La dimension de $H_D \cap H_{D'}$ est 3. Désignons par F ce sous-espace; d'après la démonstration de la remarque 5.5., il existe un trivecteur ω_1 de support F tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D) \cap I(D')$ et par conséquent nul ou décomposable. Le premier cas est trivial; dans le second $\Delta = S_{\omega-\omega_1} \cap S_{\omega_1}$ est une droite et ω un élément de $I(\Delta)$.

Si ω est de rang 5, d'après la remarque 5.2., la droite Δ est unique.

Corollaire. — 1) Soit ω un élément de $\Sigma^3_{n,5}$, il existe une base $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de E telle que

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \tag{1}$$

2) $\Sigma^3_{n,5}$ est une trajectoire de $Gl(E)$ de dimension $5(n-3)$.

2. Remarques

2.1. — L'expression (1) est pour ω, à la fois une expression minimale et une B-expression minimale: $l(\omega) = L(\omega) = 2$.

2.2. — Soit ω un élément quelconque de $\Sigma^3_{n,5}$, et Δ la droite unique, telle que ω est élément de $I(\Delta)$, alors quel que soit le sous-espace E_1, avec $S\omega = \Delta \oplus E_1$, on a $\omega \in \Delta \otimes \wedge^2 E_1$.

2.3. — Si E est hermitien (ou euclidien), compte tenu des propriétés des bivecteurs, la base, dans laquelle ω s'écrit sous forme canonique, peut-être choisie orthonormée.

III. Etude de $\Sigma^3_{6,6}$

A. — Cas complexe

Nous envisageons d'abord le cas où E est un espace vectoriel de dimension 6 sur le corps des complexes.

1. Recherche de modèles

1.1. — Proposition 1. — *Tout élément de $\Sigma^3_{6,6}$ peut s'écrire sous l'une des deux formes*

(1) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$

(2) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ étant une base de E. Pour le démontrer, nous utiliserons deux lemmes.

1.2. — Lemme 1. — Soient γ_1 et γ_2 deux élément de $\wedge^2 E$, de rang 4, de même support $F \subset E$. Alors, il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\gamma_2 - \mu\gamma_1$ soit décomposable. En effet, $\wedge^4 F$ est une droite domplexe contenant $\gamma_i \wedge \gamma_j$ $i.j = 1,2$: $\gamma_1 \wedge \gamma_1$ est non nul; posons $\gamma_2 \wedge \gamma_2 = a\gamma_1 \wedge \gamma_1$, $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$

$$\gamma_1 \wedge \gamma_2 = b\gamma_1 \wedge \gamma_1 \qquad b \in \mathbf{C} \text{ (b pouvant être nul)}$$

pour tout $\mu \in \mathbf{C}$ $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = \gamma_1 \wedge \gamma_1 (a - 2\mu b + \mu^2)$ donc il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = 0$ ce qui signifie que $\gamma_2 - \mu\gamma_1$ est décomposable.