L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

Autor(en): **Jambon, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-45380

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

par M. JAMBON

TABLE DES MATIÈRES

pages

§ 1. Préliminaires sur les formes différentielles extérieures 304

Chapitre I. — FORMES DE CAUCHY FANTAPPIÈ 308

§ 2. Forme différentielle de Cauchy Fantappiè 308
§ 3. Une formule d'Homotopie 309
§ 4. La formule intégrale de Bochner Martinelli généralisée 314

Chapitre II. — FORMES DE CAUCHY FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES 319

§ 5. Forme différentielle de Ramirez Chenkin 321
§ 6. Une représentation intégrale sur un domaine strictement pseudo-convexe 327

Chapitre III. — UNE FORMULE DE RÉSOLUTION POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY RIEMANN 328

§ 7. Solution de l'équation $\bar{\partial}\alpha = \beta$ 329

Chapitre IV. — EVALUATION POUR LA NORME UNIFORME 331

§ 8. 331
§ 9. Evaluations pour la fonction $g(x, y)$ du théorème 5. 332
§ 10. Solution bornée de l'équation $\bar{\partial}\alpha = \beta$ sur un domaine strictement pseudo-convexe 334

INTRODUCTION

Nous recherchons dans ce travail des solutions bornées de $\bar{\partial}\alpha = \beta$ sur un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$. On sait que pour $n = 1$ de telles solutions sont données par une formule intégrale de Cauchy. Aussi essayons-nous de mettre en évidence une intégrale généralisant la formule de Cauchy; c'est l'objet du chapitre premier, formule de Bochner-

Martinelli généralisée, mais le noyau n'est pas holomorphe (contrairement au noyau de Cauchy pour $n = 1$). Un théorème d'homotopie (§ 3) permet de nous ramener à un noyau dont certains termes sont holomorphes; pour obtenir ce dernier, nous devons prouver l'existence d'une fonction g convenable (th. 5, ch. II). Après quoi, on obtient assez facilement les résultats cherchés.

Je me suis inspiré pour ce travail de l'article de Ingo-Lieb [1], mais j'ai été amené à remanier profondément certaines notations et démonstrations (notamment aux § 2 et 5) dans un but de simplification.

§ 1. Préliminaires sur les formes différentielles extérieures

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{C}$.

1. Formes différentielles de degré 1.

1.1. Définition. Une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert Ω de E, est une application de Ω dans l'espace vectoriel E^* des formes complexes $\mathbf{R}$-linéaires sur E. $\forall x \in \Omega$, $\omega(x)$ est une forme $\mathbf{R}$-linéaire sur E à valeur dans $\mathbf{C}$.

Lemme 1.1. Toute forme complexe $\mathbf{R}$-linéaire sur E est somme d'une forme antilinéaire et d'une forme $\mathbf{C}$-linéaire et cela de façon unique:

$$l(z) = \frac{1}{2}[l(z) - i\,l(iz)] + \frac{1}{2}[l(z) + i\,l(iz)].$$

Exemple. Si $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, $f : \Omega \to \mathbf{C}$,

$$\forall x \in \Omega,\ df(x) = \partial f(x) + \bar{\partial} f(x) \qquad \text{ou} \qquad df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

$\partial f(x)$ désigne la partie $\mathbf{C}$-linéaire de $df(x)$.

$\bar{\partial} f(x)$ désigne la partie antilinéaire de $df(x)$.

1.2. Ecriture dans une base. Si E est muni d'une base, $E \simeq \mathbf{C}^n$,

$$x \in \mathbf{C}^n : \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Définition. dx_ν, respectivement $d\bar{x}_\nu$, désigne la forme $\mathbf{C}$-linéaire, respectivement antilinéaire, qui à x fait correspondre x_ν, respectivement $\bar{x}_\nu$.

Toute forme différentielle de degré 1 sur Ω s'écrit

$$\omega(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu(x)\, dx_\mu + \sum \omega'_\mu(x)\, d\bar{x}_\mu .$$

Par exemple,

$$\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu , \quad \bar{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_\nu} d\bar{x}_\nu .$$

2. Formes différentielles de type $(p \,.\, q)$.

2.1. Définition. $\overset{(p,\,q)}{\wedge} E^*$ est l'espace vectoriel sur **C** engendré par l'ensemble des produits extérieurs de p formes **C**-linéaires et q formes antilinéaires.

C'est le sous-espace vectoriel de l'espace des $(p+q)$ **R**-linéaires formes alternées qui vérifient $f(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_{p+q}) = \lambda p\, \bar{\lambda} q\, f(X_1 \ldots X_{p+q})$.

Remarques: $p \leqq n$, $q \leqq n$ $(n = \dim E)$.

2.2. Une forme différentielle de type (p, q), de classe $\mathscr{C}^k$ $(0 \leqq k \leqq \infty)$ sur Ω ouvert de E est une application de classe $\mathscr{C}^k$ de Ω dans $\overset{(p,\,r)}{\wedge} E^*$. On appellera $\mathscr{C}^k_{p,\,q}(\Omega)$ l'espace vectoriel sur **C** de ces formes.

2.3. Représentation dans une base. D'après (1.2), si $\omega \in \mathscr{C}^k_{p,\,q}(\Omega)$, $x \in \Omega$, on a

$$\omega(x) = \sum_{IJ} \omega_{IJ}(x)\, dx_I \wedge d\bar{x}_J ,$$

où $\quad dx_I = dxi_1 \ldots dxi_p , \quad i_1 < \ldots < i_p ,$

$\quad d\bar{x}_J = d\bar{x}j_1 \ldots d\bar{x}j_q , \quad j_1 < \ldots < j_q ,$

$\omega_{IJ}(x)$ est une application de classe $\mathscr{C}^k$ de Ω dans **C**.

3. Double forme différentielle extérieure.

(E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie sur **C**).

3.1. Soit W un ouvert de $E \times F$, une double forme différentielle de type $(p, q; r, s)$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(0 \leqq k \leqq \infty)$ sur W est une application de classe $\mathscr{C}^k$ de W dans $\overset{(p,\,q)}{\wedge} E^* \otimes \overset{(r,\,s)}{\wedge} F^*$.

On appellera $\mathscr{C}^k_{p,q\,;\,r,s}(W)$ l'espace vectoriel ainsi défini.

Si on note (x, y) les éléments de W, on définit pour $\omega \in \mathscr{C}^k_{p,q;\,r,s}(\Omega)$ $\deg_x \omega = p + q$, $\deg_y \omega = r + s$.

3.2. Représentation dans une base

$$\omega(x, y) = \sum_{IJKL} \omega_{IJKL}(x, y)\, dx_I \wedge d\bar{x}_J \,.\, dy_K \wedge d\bar{y}_L$$

avec des notations similaires à celles du § 0.2.3 et par définition

$$dx_I \wedge d\bar{x}_J \,.\, dy_K \wedge d\bar{y}_L = (dx_I \wedge d\bar{x}_J) \otimes (dy_K \wedge d\bar{y}_L)\,.$$

3.3. Produit extérieur de formes doubles.

Soient $u \in \mathscr{C}^k_{p,q;\,r,s}(W)$, $v \in \mathscr{C}^k_{p',q';\,r',s'}(W)$.

On définit $u \wedge v$ comme un élément de $\mathscr{C}^k_{p+p',q+q';\,r+r',s+s'}(W)$ par

$$\begin{aligned} u \wedge v(x, y)[X_1, \ldots, X_{p+q+p'+q'}, Y_1, \ldots, Y_{r+s+r'+s'}] \\ = \sum_{I,J,K,L} \varepsilon_{IJ}\, \varepsilon_{KL}\, u(x, y)[X_I, Y_K]\, v(x, y)[X_J, Y_L]\,, \end{aligned}$$

où les notations ont le sens suivant:

$$\begin{cases} I = \{ i_1 < \ldots < i_{p+q} \} \\ J = \{ j_1 < \ldots < j_{p'+q'} \} \\ IJ = \{ i_1, \ldots, i_{p+q}, j_1, \ldots, j_{p'+q'} \} \end{cases} \quad \text{est une permutation de } \{ 1, \ldots, p+q+p'+q' \}\,,$$

$$\begin{cases} K = \{ k_1 < \ldots < k_{r+s} \} \\ L = \{ l_1 < \ldots < l_{r'+s'} \} \\ KL = \{ k_1, \ldots, k_{r+s}, l_1, \ldots, l_{r'+s'} \} \end{cases} \quad \text{est une permutation de } \{ A, \ldots, r+s+r'+s' \}\,,$$

X_I signifie $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{p+q}})$, de même Y_K, X_J, Y_L.

Propriétés. $u \wedge v = (-1)^{[\deg_x u.\, \deg_x v\, +\, \deg_y u.\, \deg_y v]}\, v \wedge u$.

Ainsi $dx_i \,.\, dy_j = dx_i \wedge dy_j$. Mais $dx_i \wedge dy_j = dy_j \wedge dx_i$.

Le produit extérieur est évidemment distributif par rapport à l'addition et associatif.

4. Différentielle extérieure.

4.1. $\omega \in \mathscr{C}^k_{(p,q;\,r,s)}(W)$, $k \geqq 1$.
$\partial_x \omega$ est un élément de $\mathscr{C}^{k-1}_{(p+1,q;\,r,s)}(W)$ défini par

$$[\partial_x \omega(x,y)]\ [X_1, \ldots, X_{p+q+1}, Y_1, \ldots Y_{p+s}]$$
$$= \sum_{k=1}^{p+q+1} (-1)^{k-1}\, \partial_x \{\, \omega(x,y)[X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_{p+1}, Y_1, \ldots, Y_{p+s}]\}\ [X_k].$$

Définitions similaires pour $\bar\partial_x$, ∂_y, $\bar\partial_y$.

4.2. Propriétés $\partial_x \partial_x \omega = 0$, $\bar\partial_x \bar\partial_x \omega = 0$ $\partial_x \bar\partial_x \omega = -\bar\partial_x \partial_x \omega$.
Les mêmes pour y et aussi

$$\bar\partial_x \bar\partial_y = \bar\partial_y \bar\partial_x \ldots \partial_x(\alpha \wedge \beta) = (\partial_x \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg x^\alpha}\, \alpha \wedge \partial_x \beta \ldots$$

5. Norme sur $\mathscr{BC}^k_{(p,q;\,r,s)}(W)$.

Pour chaque $(x,y) \in W$ on définit

$$|\omega(x,y)| = \frac{1}{(p+q)!\,(r+s)!} \sup_{\substack{|X_i| \leq 1 \\ |Y_i| \leq 1}} |\omega(x,y)[X_1 \ldots X_{p+q}, Y_1 \ldots Y_{r+s}]|$$

Si $\sup\limits_{(x,y)\in W} |\omega(x,y)| < \infty$, ω est dite *bornée* et on définit $|\omega| = \sup\limits_{(x,y)\in W} |\omega(x,y)|$. L'ensemble des formes bornées est noté $\mathscr{BC}^k_{(p,q;\,r,s)}(W)$.
On obtient une norme sur $\mathscr{BC}^k_{(p,q;\,r,s)}(W)$. Cette norme munit $\bigoplus\limits_{(p,q;\,r,s)} \mathscr{BC}^k_{(p,q;\,r,s)}(W)$ d'une structure d'Algèbre normée car

$$|\alpha \wedge \beta| \leqq |\alpha|\ \ |\beta|.$$

Chapitre Premier

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

§ 2. Forme différentielle de Cauchy-Fantappiè

Sur un ouvert W de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, soit f^* un n-uplet de formes de $\mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$, $f^* = \{f^*_\nu\}_{1 \leq \nu \leq n}$.

Pour chaque ν on définit $f_\nu(x, y) = f^*_\nu(x, y)\,[x-y]$ et on suppose que chaque fonction $f_\nu(x, y)$ ainsi définie ne s'annulle pas sur W.

Définition 1.

$$D_q(f^*) = \frac{f^*_1}{f_1} \wedge \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*_2}{f_2}\right) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*_q}{f_q}\right) \wedge \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*_{1+q}}{f_q}\right) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*_n}{f_n}\right)$$

s'appelle la forme différentielle de Cauchy-Fantappiè (C.F. forme) d'ordre q sur W, associée à f^*.

Théorème 1. *$D_q(f^*)$ est indépendant de f^*_1.*

Démonstration. $D_q(f^*) \in \mathscr{C}^1_{(n,\,n-q;\,0,\,q-1)}(W)$. On va donc faire agir $D_q(f^*)$ sur $2n-1$ vecteurs et on mettra en évidence une simplification par $f^*_1\,[x-y]$.

On pose $X_\nu \in E$ pour $1 \leq \nu \leq 2n-q$,

$X_\nu \in F$ pour $2n-q+1 \leq \nu \leq 2n-1$,

avec les notations du § 1 (ici $E = F = \mathbf{C}^n$).

On note $\xi_\nu = y$ pour $2 \leq \nu \leq q$,

$\xi_\nu = x$ pour $q+1 \leq \nu \leq n$,

σ_{2n-1} est le groupe symétrique d'ordre $2n-1$.

$I = (i_{q+1}, \ldots, i_n)$ un arrangement à $(n-q)$ éléments de $\{1, \ldots, 2n-q\}$,

$J = (j_2, \ldots, j_q)$ une permutation à $(q-1)$ éléments de $\{2n-q+1, \ldots 2n-1\}$,

$K = \{k_1, \ldots, k_n\}$, $k_1 < \ldots < k_n$ un ensemble tel que $K \cap I = \{1, \ldots, 2n-q\}$, $K \cap I = \emptyset$.

On a alors une écriture intéressante de $D_q(f^*)$.

$$D_q(f^*)[X_1, \ldots, X_{2n-1}]$$
$$= \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_{2n-1} \\ 2 \leq \nu \leq q \\ q+1 \leq \nu \leq n}} \sum_{\substack{\varepsilon_\sigma \\ \sigma(2\nu)=j_\nu \\ \sigma(2\nu)=i_\nu}} \frac{f_1^*[X_{\sigma(1)}]}{f_1^*[x-y]} \prod_{\nu=1}^{n} \bar{\partial}_{\xi_\nu} \left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right](X_{\sigma(2\nu)}).$$

La sommation pour I, J fixés est une forme n-$\mathbf{C}$-linéaire alternée de $X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}$; elle est donc parfaitement déterminée par sa valeur sur une base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle on va choisir $X_{k_1} = [x-y]$. On peut le faire car ce vecteur se comporte comme un vecteur constant vis-à-vis de $\bar{\partial}_x$ et $\bar{\partial}_y$. Si $\sigma_{(1)} \neq k_1 \exists \nu$ avec $X_{\sigma(2\nu+1)} = X_{k_1} = [x-y]$ pour ce ν on a

$$\bar{\partial}_{\xi_\nu}\left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right] = 0.$$

Les seuls termes restants sont des termes avec $\sigma(1) = k_1$ et on a la simplification

$$\frac{f_1^*[x-y]}{f_1^*[x-y]} = 1.$$

Le théorème est démontré.

§ 3. Une formule d'homotopie

Nous allons utiliser le théorème 1 pour rechercher la connexion entre différentes C.F. formes. Nous entrevoyons ensuite les cas particuliers importants pour la suite.

1. Soit toujours W un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Définition 2. Pour $1 \leq \nu \leq r$, soit $f_\nu^* \in \mathscr{C}^{k_\nu}_{(p_\nu, q_\nu;\, r_\nu, s_\nu)}(W)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.

$$D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}(f_1^*, \ldots, f_r^*) = (\overset{\alpha_1}{\wedge} f_1^*) \wedge \ldots \wedge (\overset{\alpha_r}{\wedge} f_r^*).$$

Définition 3. Soit $f^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ avec $f(x, y) = f^*(x, y)[x-y]$ ne s'annulle pas sur W.

$$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

C'est exactement la définition 1 dans le cas où toutes les formes f_ν^* sont égales.

Remarque. $$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \frac{\bar\partial_y f^*}{f}, \frac{\bar\partial_x f^*}{f}\right)$$

car $$\bar\partial_y \frac{f^*}{f} = \bar\partial_y\left(\frac{1}{f}\right) \wedge f^* + \frac{\bar\partial_y f^*}{f}$$

et le premier terme disparaît dans le produit extérieur avec f^*.
Soit maintenant $g^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ vérifiant de plus $\bar\partial_y g^* = 0$.
On définit comme pour f^*, $g(x, y) = g^*(x, y)\,[x-y]$ supposée non nulle en tout point de W et $D_{q+1}(g^*)$; dès que $q > 0$ on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$.

Lemme 3.1. Soit $q + r \geqq 1$, $q + r + s + 1 = n$. Alors

$$D_{1,q,r,s}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{r+q}\,\bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \frac{r}{r+q}\,\bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ \frac{r}{r+q}\,D_{1,q,r-1,s+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Démonstration. Nous supposons tout d'abord $q \geqq 1$ et $r \geqq 1$ et abrégeons les notations par $F^* = f^*/f$ et $G^* = g^*/g$.
D'après le théorème 1

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) = D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*).$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons la forme

$$\bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$

et soustrayons-la de nouveau après l'avoir différentiée conformément au § 1 (3.3 et 4.3)

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) = D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_c G^*)$$
$$- \{ D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ \dots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,r-1,1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

D'après le § 1.3.3 c'est aussi

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ (-1)^q p D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons maintenant

$$- \frac{r}{q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$

et soustrayons cette forme après l'avoir différentiée

$$\bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= D_{1,1,q,r-1,s}(\bar\partial_x G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ D_{1,1,1,q-1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_x \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \dots$$
$$+ \dots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

En utilisant encore le § 1.3.3 il vient

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} D_{1,q,r-1,s+1}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

En appliquant encore le théorème 1 au dernier terme du second membre et en le faisant passer au premier membre on obtient exactement le lemme 3.1

Si $q = 0$ et $r \geqq 1$ le lemme devient

$$D_{1,r,s}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x G^*) + D_{1,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Si $q \geqq 0$ et $r = 0$ le lemme devient

$$D_{1,q,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*) = \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Dans les deux cas, la différentiation du premier terme du second membre par le § 1.4.3 puis l'application du § 1.3.3 donnent immédiatement le résultat.

2. Nous appliquons maintenant le lemme dans le cas $q = 0$ et $r = n - 1$:

$D_1(f^*) = D_{1,r}(f^*/f, \bar{\partial}_x(f^*/f))$ (par définition).

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) + D_{1,r-1,1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

On recommence sur le deuxième terme du second membre:

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \bar{\partial}_x D_{1,1,r-2,1}\left(\left(\frac{g^*}{g}, \left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)\right) + D_{1,r-2,2}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Après avoir répété r fois l'opération

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \ldots - \bar{\partial}_x D_{1,1,1,r-2}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ D_{1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Une nouvelle application du théorème 1 au dernier terme de cette somme donne immédiatement:

THÉORÈME 2. $D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*)$,

où $A(f^*, g^*)$ est la double forme

$$A(f^*, g^*) = - \sum_{k=1}^{r} D_{1,1,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Par application du lemme 3.1 pour $q \geqq 1$ on obtient une relation similaire si on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$. C'est:

THÉORÈME 3.

Pour $q \geqq 1$ et $q + r + 1 = n$ il existe des formes doubles $A(f^*, g^*)$ et $C(f^*, g^*)$ sur W telles que:

$$D_{q-1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*) \quad \text{où}$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_k D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$C(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r+1} c_k D_{1,1,q-1,r-k+1,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

avec a_k et c_k coefficients rationnels.

La démonstration est exactement calquée sur celle du théorème 2 mais on applique $(r+1)$ fois le lemme 3.1 (la dernière application donne seulement un terme en $\bar{\partial}_y$).

§ 4. La formule intégrale de Bochner-Martinelli généralisée

On supposera désormais que $\mathbf{C}^n$ est muni de sa structure d'espace Hilbertien.

1. Soit $W = \{ (x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \mid x \neq y \}$; alors sur W la C.F. forme définie à partir de $(\bar{x}-\bar{y})^*$ (voir (1))

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q-1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$$

est bien définie.

(1) Notons que, $\forall u \in \mathbf{C}^n$, $\bar{u}^*$ désigne la forme $\mathbf{C}$-linéaire

$$u^* : h \to \langle h \,.\, u \rangle \,.$$

Définition 4. $B_{nq}(x, y)$ s'appelle le noyau de Bochner-Martinelli pour une $(0,q)$ forme (B.M. Kern)

$$B_{nq} \in \mathscr{C}^{\infty}_{(n,\, n-q-1;\, 0,q)}(W) \,.$$

Nous prolongeons la définition par $B_{n,-1} = B_{n,n} = 0$.

Lemme 4.2. $\bar{\partial}_x B_{nq} = (-1)^q \bar{\partial}_y B_{n,q-1}$, $0 \leq q \leq n$.

Ce lemme résulte de $(n-q)\, \bar{\partial}_x D_{q+1}(f^*) = -q\, \bar{\partial}_y D_q(f^*)$.

Démonstration. Remarquons que d'après le théorème 1 (ou sa démonstration)

$$D_{q,r+1}\left(\bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) = 0 \quad \text{avec} \quad q + r + 1 = n \,.$$

$$\bar{\partial}_x D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= q\,(-1)^q D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$

$$\bar{\partial}_y D_{1,q-1,r+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= (1+r)\,(-1)^{q-1} D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

On a utilisé les formules de dérivation et de commutation des § 1.3.3 et 1.4.3. En tenant compte des coefficients on obtient le lemme 4.2.

Lemme 4.3.

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} (n-1)! \quad \sum [(\bar{x}_k - \bar{y}_k)\, dx_k \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \bigwedge_{\mu=1}^{n-q-1} (d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu})] \, | x - y |^{-2n},$$

où la sommation est étendue aux indices vérifiant $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-q-1} \leq n$.

Il est clair que seuls les termes où $k, i_1, \ldots i_q, j_1 \ldots j_{n-q-1}$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$ ne sont pas nuls.

Démonstration. On développe l'expression de $D_{q+1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$ donnée dans (§ 3.1 Remarque) en utilisant de plus les règles de commutation.

2. Soit maintenant G un domaine borné dans $\mathbf{C}^n$ avec une frontière ∂G de classe $\mathscr{C}^1$. On prend l'orientation naturelle de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire $x_1', x_1'', \ldots, x_n', x_n''$ avec $x_\nu = x'_\nu + ix''_\nu$ est un système de coordonnées de $\mathbf{R}^{2n}$ orienté positivement et sur ∂G on choisit l'orientation induite (celle du théorème de Stokes). Ainsi les signes sont déterminés pour l'intégration.

Lemme 4.4. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^{\infty}_{0,q+1}(G)$, γ bornée sur G. Alors

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^{\infty}_{(0,q)}(G)$$

Démonstration. D'abord l'intégrale a un sens car

$$| B_{nq}(x, y) | = 0\left(\frac{1}{| x - y |} 2n - 1\right)$$

d'après le lemme 4.3.

Montrons la différentiabilité pour $y_o \in G$; soit f fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $0 \leq f \leq 1$ partout, $f = 1$ dans un voisinage compact K_1 de y_o, f est à support compact K_2 avec $K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset G$.

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} [1 - f(x)]\, \gamma(x)\, B_{nq}(x, y) + \int_{x \in G} f(x)\, \gamma(c)\, B_{nq}(x, y).$$

Le premier terme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car l'intégration porte en réalité (pour y voisin de y_o) sur un domaine où le dénominateur ne s'annulle pas.

Pour le deuxième terme $\alpha_2(y)$ on effectue le changement de variable d'intégration $x = y + z$. Il vient pour y voisin de y_o

$$\alpha_2(y) = \sum \int_{z \in G - y_o} \gamma(y+z) f(y+z) \frac{\bar{z}_k}{|z|^{2n}} dz_k \ldots$$

Sous cette forme la différentiabilité en y ne pose plus de problème car $\gamma(y+z)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Le raisonnement vaut naturellement pour tout y_o dans G.

3. Théorème 4.

Soit $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{oq}(\bar{G})$. Alors pour chaque $y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \Big[\int_{x \in \partial G} \gamma(c) \wedge B_{nq}(x, y) - \int_{x \in G} [\bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] - \bar{\partial}_y \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq-1}(x, y) \Big].$$

C'est la formule de Bochner-Martinelli généralisée, pour $n = 1$, $q = 0$, on retrouve la formule de Cauchy.

a) On a
$$\begin{aligned} d_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] &= \bar{\partial}_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x B_{nq}(x, y) \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y B_{n,(q-1)}(x, y), \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 4.2 pour la dernière égalité.

b) Soit tout d'abord $q = 0$; γ est une fonction, et $B_{n,q-1} = B_{n,-1}$ disparaît.

Nous choisissons $y \in G$ et posons

$$K_\varepsilon = \{x \in G \mid |x - y| \leqq \varepsilon\} \subset\subset G \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = G \setminus K_\varepsilon$$

Nous appliquons le théorème de Stokes sur G_ε à la forme trouvée en a).

$$\int_{x \in G_\varepsilon} \bar{\partial}_x \gamma(c) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{x \in \partial G_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) - \int_{x \in \partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y)$$

Dans cette égalité on fait $\varepsilon \to 0$, l'intégrale de « volume » converge vers l'intégrale étendue à tout G et la première intégrale de « surface » ne change pas.

Pour la deuxième intégrale de « surface » on a

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{\partial K_\varepsilon} [\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y) + \gamma(y) \int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y).$$

La première intégrale du second membre tend vers 0 avec ε car

$$|[\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y)| = 0\left(\frac{1}{|x - y|^{2n-2}}\right).$$

Le deuxième terme est $\gamma(y)$ à un facteur numérique près, en effet on fait le changement $x - y = \varepsilon t$ dans l'expression de $B_{no}(x, y)$ donnée par le lemme 4.3.

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \bar{t}_k \, d\, t_k \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} (d\, \bar{t}_\lambda \wedge d\, t_\lambda).$$

En utilisant les coordonnées réelles $t_\lambda = t'_\lambda + i\, t''_\lambda$

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y)$$

$$= (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2i)^n}{2} (-t''_k\, dt'_k + t'_k\, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda,$$

où on a remarqué que les termes

$$(t'_k\, dt'_k + t''_k\, dt''_k) = -\sum_{\lambda \neq k} t'_\lambda\, dt'_\lambda + t''_\lambda\, dt''_\lambda \quad \text{sur} \quad |t| = 1$$

ont disparu dans le produit extérieur.

Mais on reconnaît

$$\int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} (-t''_k\, dt'_k + t'_k\, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq 1}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda$$

$= \text{aire de la sphère de rayon 1 en dimension } 2n = \dfrac{2\Pi^n}{\Gamma(n)}$, d'où

$$\int_{x \in \partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (2\Pi i)^n,$$

En reportant cette valeur au début de b) on obtient le théorème 4 pour $q = 0$.

c) Soit maintenant q quelconque et $y_o \in G$; nous choisissons une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec $0 \leqq f \leqq 1$ dont le support est compact et contenu dans G et qui vaut 1 dans un voisinage K de y_o.

On décompose $\gamma(x) = (1-f)\,\gamma(x) + f\gamma(x)$.
La formule de Stokes appliquée à la différentielle trouvée en a) avec $(1-f)$ γ donne le théorème pour $(1-f)\,\gamma$.

d) On peut donc sans restreindre la généralité supposer maintenant que γ est à support compact.
On écrit conformément aux notations du paragraphe 1 (2.3)

$$\gamma(x) = \sum_I \gamma_I(x)\, dx_I$$

et on cherche à démontrer

$$(3.1) \qquad \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I = \frac{1}{(2\Pi i)^n}\Big[-\int_{x\in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x,y) - \bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma(x)\, dx_I \wedge B_{nq-1}(x,y)\Big].$$

Occupons-nous d'abord du deuxième terme (en $B_{n,q-1}$). On remarque au départ que

$$\bar{\partial}_y \int_{w\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) = \int_{x\in G} \sum_h \frac{\partial \gamma_I}{\partial \bar{x}_k}\, d\bar{y}_k \wedge d\bar{x}_I\, B_{nq-1}(x,y),$$

en utilisant la technique de dérivation vue à la fin de la démonstration du lemme 4.4. On remplace alors $B_{nq-1}(x,y)$ par sa valeur explicite donnée au lemme 4.3.

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) \\
&= \int_{x\in G} (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} (n-1)! \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{i\nu}}\, d\bar{y}_{i\nu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} (d\bar{y}_{i\lambda} \wedge dx_{i\lambda}) \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{n-q} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu} \\
&= (n-1)! \Bigg[\int_{x\in G} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{i\nu}}\, d\bar{x}_{i\nu} \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda\Bigg] \wedge d\bar{y}_I.
\end{aligned}$$

On rappelle $I = (i_1, \dots i_\nu, \dots, i_q)$, $i_1 < \dots < i_q$,
et on a posé $J = (j_1, \dots j_\mu, \dots, j_{n-q})$, $j_1 < \dots < j_{n-q}$,
de telle sorte que $I \cup J$ est une permutation de $(1, \dots, n)$.

Occupons-nous de la même façon du terme en $B_{nq}(x, y)$.

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y)$$

$$= (n-1)!\,(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})$$

$$dx_{j\mu} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{n-q} (d\bar{x}_{j\lambda} \wedge dx_{j\lambda})$$

$$= (n-1)!\left[\int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu}(\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})\right.$$

$$\left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda=j_\mu}}^{n} (dx_\lambda \wedge d\bar{x}_\lambda)\right] d\bar{y}_I .$$

On reconnaît dans la somme des deux intégrales en B_{nq} et B_{nq-1} intervenant dans (3.1)

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) \wedge B_{no}(x, y)\, d\bar{y}_I = -(2\Pi i)^n \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I ,$$

d'après le théorème 4 démontré pour $q = 0$. On reporte dans (3.1) et on obtient exactement le résultat désiré.

Chapitre II

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Indiquons tout d'abord quelques notations: soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$; si φ est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, $d \otimes d\varphi(x)$ est la forme bilinéaire symétrique

$$d \otimes d\varphi(x)[h.k] = d\{d\varphi(x)[h]\}[k] .$$

D'après le lemme 1.1 appliqué deux fois, on peut introduire la partie 2-**C**-linéaire, 1-**C**-linéaire — 1-antilinéaire, 1-antilinéaire — 1-**C**-linéaire, 2-antilinéaire de $d \otimes d\,\varphi\,(x)$. On notera

$$d \otimes d\,\varphi\,(x) = \partial \otimes \partial\,\varphi\,(x) + \partial \otimes \bar{\partial}\,\varphi\,(x) + \bar{\partial} \otimes \partial\,\varphi\,(x) + \bar{\partial} \otimes \bar{\partial}\,\varphi\,(x)\,.$$

On remarquera $\partial \otimes \bar{\partial}\,\varphi\,(x)\,[h.k] = \bar{\partial} \otimes \partial\varphi\,(x)\,[k.h]$.

Hessien complexe. Définition. La forme quadratique réelle

$$\partial \otimes \bar{\partial}\,\varphi\,(x)\,[h.k] = \bar{\partial} \otimes \partial\,\varphi\,(x)\,[h.k]$$

est appelé le hessien complexe de φ au point x.

Domaine strictement pseudo-convexe. Un domaine G de $\mathbf{C}^n$ est dit strictement pseudo-convexe si pour tout y dans ∂G, il existe un voisinage U de y et une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur U pour laquelle on ait

(1) $G \cap U = \{\, x \in U \mid \varphi\,(x) < 0 \,\}$ et $\forall x \in \partial G \cap U\,(\varphi\,(x) = 0)\, d\varphi\,(x) \neq 0$

(2) $\forall x \in \partial G \cap U,\ \forall w \in \mathbf{C}^n$ avec $|\,w\,| \neq 0$ et $\partial\varphi\,(x)\,[\,w\,] = 0$

$$\partial \otimes \bar{\partial}\varphi\,(x)\,[\,w\,,\,w\,] > 0 \quad \text{(condition de Lévi).}$$

Proposition. Soit G un domaine borné strictement pseudo-convexe avec un bord de classe $\mathscr{C}^p\,(p \geqq 2)$, il existe alors dans un voisinage de $\bar{G}$ une fonction réelle φ de classe $\mathscr{C}^p$ pour laquelle on ait

(1) $G = \{\, x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi\,(x) < 0 \,\}$

(2) $d\varphi\,(x) \neq 0$ dans un voisinage de ∂G.

(3) Dans un voisinage de ∂G, φ est strictement plurisousharmonique (c'est-à-dire le hessien complexe de φ est une forme quadratique définie positive).

La démonstration est indiquée en [3]. La compacité de G et la classe $\mathscr{C}^p$ du bord ∂G permettent de trouver une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^p$ avec $d\psi\,(x) \neq 0$ sur ∂G, $G = \{\, x \in \mathbf{C}^n \mid \psi\,(x) < 0 \,\}$, et vérifiant la condition de Lévi; en prenant ensuite $\varphi = \psi\, e^{A\psi}$ où A est un réel suffisamment grand, on obtient la proposition.

De plus, choisissons une suite strictement monotone de nombres réels positifs ε_ν tendant vers 0 et posons

$$G_\nu = \{\, x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi\,(x) < -\,\varepsilon_\nu \,\}$$

Le domaine G_ν a, au cas où ε_1 est assez petit, les mêmes propriétés que G et on a

$$G_\nu \subset\subset G_{\nu+1} \subset\subset G\,, \quad \bigcup_{\nu \geq 1} G_\nu = G\,.$$

On a des propriétés similaires avec $\tilde{G}_\nu = \{ x \in \mathbf{C}^n \mid \varphi(x) < \varepsilon_\nu \}$

$$G \subset\subset \tilde{G}_{\nu+1} \subset\subset \tilde{G}_\nu\,.$$

§ 5. Formes différentielles de Ramirez-Chenkin

Nous désirons construire une fonction g satisfaisant aux hypothèses du § 3.1. Pour cela nous avons besoin du lemme:

1. *Lemme 5.1.* Soient G un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbf{C}^n$, Ω un ouvert quelconque de $\mathbf{C}^n$, $f_x(y)$ une (0, 1) forme de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\Omega \times G$, vérifiant $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$. Alors l'équation $\bar{\partial}_y C(x, y) = f_x(y)$ a une solution de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\Omega \times G$.

Démonstration. On s'appuie sur le théorème 2.2.3, page 107 de [5] avec poids nul. On trouve alors que pour chaque $x \in \Omega$, il existe une solution $u_x(y)$ avec

$$\bar{\partial}_y u_x(y) = f_x(y)\,,$$

$$\| u_x \| \leq e\,[\text{diamètre de } G]^2\, \| f_x \|\,.$$

$\| \ \|$ désignent les normes dans les espaces $L^2_{(o,o)}(G)$ ou $L^2_{(o,1)}(G)$.

$u_x(y) \in H^2_{(o\ o)}(G) \otimes E^2_{(o\ o)}(G)$, où $E^2_{(o,o)}(G)$ est le sous-espace fermé des fonctions holomorphes sur G de $L^2_{o\ o}(G)$ et $E^2_{o\ o}(G)$ son supplémentaire orthogonal.

Soit $C(x, y)$ la projection de $u_x(y)$ sur $E^2_{o\ o}(G)$; on vérifie facilement que $C(x, y)$ ne dépend que de $f_x(y)$ et que la correspondance

$$f_x(y) \xrightarrow{E} C(x, y)$$

est une application linéaire continue (pour chaque x fixé) de $H^2_{(0\ 1)}(G)$ dans $L^2_{(0\ 1)}(G)$.

Notons E^* l'adjoint de E. Montrons alors que C est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\Omega \times G$. Il suffit de le faire au voisinage de chaque point (x_o, y_o). On introduit

à cet effet une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support compact dans G telle que $\psi(y) = 1$ dans un voisinage de y_o et $0 \leq \varphi \leq 1$ partout.

La formule de Bochner-Martinelli appliquée à $\psi(y) \times C(x, y)$ donne

$$C(x, y) = K_n \int_G C(x, z)\, \bar{\partial}_z \psi(z) + \psi(z)\, \bar{\partial}_z C(x, z) \wedge B_{no}(z, y)\,.$$

L'intégrale se décompose en une somme dont l'un des termes porte sur $\bar{\partial}_z C(x, y) = f_x(z)$; ce terme est de classe $\mathscr{C}^p$ (voir lemme 4.2). Il reste à étudier

$$\int_G [Ef_x](z) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(z)\, B_{noi}(z, y) \right) \wedge \bigwedge_\lambda d\bar{z}_\lambda \wedge dz_\lambda = d(x, y)\,,$$

où B_{noi} est le coefficient du terme sans $d\bar{z}_i$ dans le noyau B_{no}.

$$d(x, y) = \int_G f_x(z)\, E^* \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(z)\, B_{noi}(z, y) \right) \wedge \bigwedge_\lambda d\bar{z}_\lambda \wedge dz_\lambda\,.$$

Sous cette dernière forme on peut dériver par rapport à x sous l'intégrale (on pouvait dériver par rapport à y sous la forme initiale). On vérifie que les limites sont uniformes par rapport à y dans un voisinage convenable de y_o, ce qui permet d'affirmer que les dérivées sont continues par rapport au couple (x, y). $C(x, y)$ est donc de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\Omega \times G$.

2. Soit toujours G un domaine borné strictement pseudo-convexe de bord de classe $\mathscr{C}^4$. On a le théorème essentiel de ce chapitre.

THÉORÈME 5.

Il existe un voisinage W de $\partial G \times \bar{G}$ et une fonction $g(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur W pour laquelle on ait

(1) $\quad \bar{\partial}_y g(x, y) = 0\,,$

(2) $\quad g(x, x) = 0\,,$

(3) $\quad x \neq y : \; |g(x, y)| > 0\,.$

Nous construisons cette fonction au moyen de la fonction φ de l'introduction et du lemme 1.3 (cette construction est faite dans [7]).

On définit pour x voisin de ∂G et y voisin de $\bar{G}$

(4) $\quad P(x, y) = 2\, \partial\varphi(x)[x - y] - \partial \otimes \partial\varphi(x)[x - y, x - y]\,.$

On remarque qu'on a pris les termes **C**-linéaires ou **C**-bilinéaire du développement de Taylor à l'ordre 2 de $\varphi(y) - \varphi(x)$.

$$(5) \qquad \varphi(y) - \varphi(x) = d\varphi(x)[y-x] + \frac{1}{2!} d \otimes d\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3),$$

$$(5') \qquad \varphi(y) - \varphi(x) = \partial\varphi(x)[y-x] + \bar{\partial}\varphi(x)[y-x] + \frac{1}{2}[\partial \otimes \partial\varphi(x) + \bar{\partial} \otimes \bar{\partial}\varphi(x)][x-y, x-y] + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3).$$

On reconnaît dans (5′) $Re\, P(x, y)$ plus le hessien complexe de φ, d'où

$$(6) \qquad Re\, P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] + 0(|x-y|^3).$$

La stricte plurisousharmonicité de φ permet d'écrire

$$\exists \gamma > 0, \forall x \in \partial G, \ \forall y \in \bar{G}, \ \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x-y, x-y] \geqq \gamma |x-y|^2.$$

D'autre part $\exists \delta < 0$ tel que $0(|x-y|^3) \leqq \gamma/2\, |x-y|^2$ pour $|x-y| \leqq \delta$ d'où

$$(7) \quad \forall (x, y) \in \partial G \times \bar{G} \text{ tels que } |x-y| \leqq \delta, \ Re\, P(x, y) \geqq \gamma/2\, |x-y|^2.$$

Soit $h : 0 < h < \gamma\, \delta^2/8$.

L'ouvert $\Omega = \{ x, y \mid Re\, P(x, y) > h \}$ contient donc $\partial G \times \bar{G} \cap \{(x, y) \mid -\frac{\delta}{2} \leqq |x-y| \leqq \delta \}$.

Il existe donc des voisinages ouverts U de ∂G, V de $\bar{G}$ et des réels α, β tels que $0 < \alpha < \beta$ pour lesquels on a

$$(8) \qquad U \times V \cap \{(x, y) \mid \alpha < |x-y| < \beta\} \subset \{(x, y) \mid Re\, P(x, y) > h\}.$$

Définissons alors une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ de **R** dans **R** telle que $0 \leqq \psi \leqq 1$ partout, $\psi(t) = 0$ pour $t \leqq h/2$, $\psi(t) = 1$ pour $t \geqq h$.

Et sur $U \times V$ on définit

$$A(x, y) = \log P(x, y) \times \psi[Re\, P(x, y)] \quad \text{si} \quad Re\, P(x, y) > 0,$$

$$A(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad Re\, P(x, y) < \frac{h}{2},$$

Il est clair que $A(x, y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ ainsi que $\bar{\partial}_y A(x, y)$ sur $U \times V$ et même sur $\overline{U} \times \overline{V}$.

On introduit enfin

$$f_x(y) = \begin{cases} \bar{\partial}_y A(x, y) & \text{pour} \quad |x-y| < \beta, \\ 0 & \text{pour} \quad |x-y| > \alpha. \end{cases}$$

$f_x(y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à (x, y) sur $U \times V$ et de plus $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$. D'après le lemme 5.1 dont toutes les hypothèses sont vérifiées il existe une fonction $C(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U \times V$ telle que $\bar{\partial}_y C(x, y) = f_x(y)$.

La fonction

$$g(x, y) = P(x, y)\, e^{C(x,y) - A(x,y)} \quad \text{si} \quad |x-y| < \beta,$$

$$g(x, y) = e^{C(x,y)} \quad \text{si} \quad |x-y| > \alpha,$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U \times V = W$ et vérifie les hypothèses 1), 2), 3) du théorème 5.

On pourra même prendre $V = \tilde{G}_v$ avec les notations de l'introduction pour v assez petit et $U = \tilde{G}_v \backslash G_v$.

3. *Problème de division.*

THÉORÈME 6.

Pour toute fonction g vérifiant les conditions du théorème 5, il existe un voisinage W' de $\partial G \times G$ et $g^* \in \mathscr{C}^2_{1\,0}(W')$ telle que $\bar{\partial}_y g^* = 0$ et $g(x, y) = g^*(x, y)\,[x-y]$ sur W'.

Démonstration. On introduit une suite finie d'ouverts

$$\partial G \times G \subset\subset U_n \times V_n \subset\subset \ldots \subset\subset U_1 \times V_1 = U \times V$$

où chaque V_k est un voisinage strictement pseudo-convexe de G.
On pose $\omega_k = U_k \times V_k \cap \{ x_i = y_i \mid k+1 \leq i \leq n \}$.
On cherche alors à démontrer par récurrence sur k

$$\begin{cases} g(x, y) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x, y)(x_i - y_i) \quad \text{sur} \quad \omega_k, \\ g_i \in \mathscr{C}^2_{o\,o}(\omega_k) \quad \text{et} \quad \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0. \end{cases}$$

$k = n$ fournira le résultat du théorème 6.

$k = 1$ se ramène à un problème (trivial) de division à une variable.

Il s'agit de passer de $k - 1$ à k. On suppose donc

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{k-1} g_i(x, y)(x_i - y_i), \ \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0$$

et g_i de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_{k-1}.

On procède en deux temps.

a) On prolonge les $g_i(x, y)$ en des $g_i(x, y)$ sur ω_k, ce sera l'objet du lemme 5.2.

b) $h(x, y) = g(x, y) - \sum_{i=1}^{k-1} g_i(x, y)(x_i - y_i)$ définie sur ω_k s'annulle pour $x_k = y_k$, donc $h(x, y) = (x_k - y_k) g_k(x, y)$ (division à une variable) et on a g_k de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_k et $\bar{\partial}_y g_k(x, y) = 0$.
Donc

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x, y)(x_i - y_i) \quad \text{sur} \quad \omega_k \quad \text{avec} \quad \bar{\partial}_y g_i(x, y) = 0$$

et g_i de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_k.

Lemme 5.2. $(x, y) \to \gamma(x, y)$ fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_{k-1} avec $\bar{\partial}_y \gamma(x, y) = 0$ se prolonge en Γ de classe $\mathscr{C}^2$ sur ω_k avec $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$.

Démonstration. On introduit

$$\Omega = (U_{k-1} \times V_{k-1}) \cap \{ x_i = y_i \mid k + 1 \leq i \leq n \},$$

$$\tilde{\omega} = \{ x, y \in \Omega \mid (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k \ldots x_n) \in \Omega \}.$$

ω_{k-1} est fermé dans Ω, $\tilde{\omega}$ est ouvert dans Ω.

Donc $K_1 = \omega_{k-1} \cap \overline{\omega_k}$ et $K_2 = (\complement_\Omega \tilde{\omega}) \cap \overline{\omega_k}$ sont deux compacts disjoints de Ω. Il existe donc une fonction $\psi(x, y)$ réelle

$$\psi(x, y) = 1 \text{ pour } (x, y) \in K_1,$$
$$\psi(x, y) = 0 \text{ pour } (x, y) \in K_2,$$

$0 \leq \psi(x, y) \leq 1$ partout, ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact dans Ω. γ se prolonge en $\tilde{\gamma}$ sur $\tilde{\omega}$ holomorphe en y par

$$\tilde{\gamma}(x, y) = \gamma(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots, x_n).$$

On recherche alors Γ sous la forme

$$\Gamma(x, y) = \tilde{\gamma}(x, y) \times \psi(x, y) + (x_k - y_k)\, v(x, y).$$

La condition $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$ entraîne

$$\bar{\partial}_y v(x, y) = \frac{\tilde{\gamma}(x, y)\, \bar{\partial}_y \psi(x, y)}{x_k - y_k} = f_x(y).$$

On a trivialement $\bar{\partial}_y f_x(y) = 0$ et $f_x(y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω; le lemme 5.1 appliquée à $f_x(y)$ (mais avec $y \in \mathbf{C}^k$ et $x_1, \ldots, x_n$ comme paramètre) donne une solution v de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω qui prolonge γ en Γ sur ω_k, avec $\bar{\partial}_y \Gamma(x, y) = 0$ et Γ de classe $\mathscr{C}^2$.

4. Avec les notations précédentes, compte tenu des théorèmes 5 et 6, $g^* \in \mathscr{C}^2_{0\,1}(W)$ avec W' voisinage de $\partial G \times G$, vérifie les hypothèses du § 3 sur $W = W' \backslash \{(x, y) \mid x = y\}$.

Nous posons maintenant

$$\Omega_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q+1}(g^*),$$

$$\Omega_{nq} \in \mathscr{C}^1_{(n, n-q-1\,;\,0, q)}(W), \quad \bar{\partial}_y \Omega_{nq}(x, y) = 0.$$

Il résulte du théorème 2 ($q=0$) et du théorème 3 ($q \geqq 1$) que si B_{nq} désigne à nouveau le noyau de Bochner-Martinelli:

THÉORÈME 7.

Il existe des doubles formes A_{nq} et C_{nq} dans $\mathscr{C}^1_{(n, n-q-2\,;\,o, q)}(W)$ et $\mathscr{C}^1_{(n, n-q-1\,;\,o, q-1)}(W)$ telles que

$$B_{nq}(x, y) = \Omega_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y)$$

Les formes du second membre sont appelées *formes de Ramirez-Chenkin.*

§ 6. Une représentation intégrale sur un domaine strictement pseudo-convexe

Nous conservons les notations utilisées jusqu'ici. Soit γ une $(0, q)$-forme indéfiniment différentiable sur $\bar{G}$. D'après le théorème 7 on a

$$\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) = \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) + \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y) .$$

Toutes les formes intervenant sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $W(B_{nq}, \Omega_{nq}, A_{nq}, C_{nq})$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ en y. Dans la dernière intégrale échangeons la différentiation et l'intégration.

$$\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{nq}(x, y) = \bar{\partial}_y \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge C_{nq}(x, y) = \bar{\partial}_y B(y)$$

où $B \in \mathscr{C}^\infty_{(o, q-1)}(G)$.

Pour transformer la deuxième intégrale du second membre, nous avons besoin de

$$\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) = dx\, A_{nq}(x, y) .$$

Nous construisons pour $y \in G$ l'intégrale

$$\int_{\partial G} d_x(\gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)) .$$

Pour chaque y fixé, c'est l'intégrale d'une forme d_x exacte qui est donc nulle.

D'autre part

$$\begin{aligned} d_x[\gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y)] &= d_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) \\ &\quad + (-1)^q \gamma(x) \wedge d_x[A_{nq}(x, y)] \\ &= \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) , \end{aligned}$$

d'où

$$0 = \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + (-1)^q \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y) .$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) &= \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) \\ &\quad + (-1)^{q+1} \int_{\partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y B(y) . \end{aligned}$$

On porte cette relation dans le théorème 4 ainsi on en tire:

THÉORÈME 8.

Pour chaque domaine strictement pseudo-convexe G de $\mathbf{C}^n$, avec un bord de classe $\mathscr{C}^4$, il existe des doubles formes $\Omega_{nq}(x, y)$ et $A_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^1_{n, n-q-1;\, o, q}(W)$ et $C^1_{n, n-q-2;\, o, q}(W)$ sur un ouvert W contenant $\partial G \times G$, de telle sorte que ce qui suit est valable:
Si $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{pq}(\bar{G})$, alors $\forall y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + (-1)^{q+1} \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y \right.$$

$$\left. - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)\right] + \bar{\partial}_y \Gamma(y).$$

Avec $\Gamma \in \mathscr{C}^\infty_{(o, q-1)}(G)$. On rappelle $\bar{\partial}_y \Omega_{nq} = 0$ pour $q = 0$, $\Omega_{nq} = 0$ pour $q > 0$, Ω_{nq} et A_{qn} sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ en y.

Il est clair que pour les domaines G_ν introduits au début de ce chapitre, la même représentation est valable avec les mêmes noyaux.

CHAPITRE III

UNE FORMULE DE RÉSOLUTION POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Si G est un domaine borné dans le plan avec un bord suffisamment régulier et g une fonction bornée $\mathscr{C}^\infty$ sur G, alors la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{g(x)}{x - y} dx \wedge d\bar{x}, \quad y \in G,$$

satisfait l'équation différentielle $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{y}} = g$.

Dans ce chapitre nous construisons au moyen du théorème 8 une solution de $\bar{\partial}\alpha = \beta$ sur un domaine strictement pseudo-convexe au moyen d'une intégrale de la même forme.

§ 7. Solution de l'équation

1. $G, G_\nu, \varphi, W, \Omega_{nq}, A_{nq}$ sont définis comme dans le chapitre précédent. Soit $\beta \in \mathscr{C}^\infty_{0,q+1}(G)$ bornée sur G pour la norme définie au § 1.5.

Nous posons

$$\gamma_\nu(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G_\nu} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y),$$

$$\zeta_\nu(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y),$$

$\nu \in \mathbf{N}, 0 \leq q \leq n-1$.

Notons qu'on ne peut a priori remplacer G_ν par G car β n'est pas définie sur ∂G.

2. *Lemme 7.1.* La suite $\gamma_\nu(y)$ converge localement uniformément sur G ainsi que toutes ses dérivées vers

$$\gamma(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y)$$

et $\qquad \gamma \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(G).$

Ceci résulte du fait que β est bornée et du lemme 4.4.

3. Nous nous occupons des propriétés correspondantes pour ζ_ν. Puisqu'on peut différentier sous le signe intégrale à un ordre quelconque, il vient aussitôt:

Lemme 7.2. Les formes ζ_ν sont indéfiniment différentiables sur G_ν. Le lemme 7.3 n'est pas tout aussi trivial.

Lemme 7.3. La suite ζ_ν converge avec toutes ses dérivées localement uniformément sur G.

Démonstration. Soit $G' \subset\subset G_{\nu_0}$ et $\mu > \nu > \nu_0$.

$$\begin{aligned}\zeta_\mu(y) - \zeta_\nu(y) &= (-1)^{q+1} \int_{\partial G_\mu - \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq} \\ &= (-1)^{q+1} \int_{\partial(G_\mu \setminus G_\nu)} \beta(x) \wedge A_{nq}\end{aligned}$$

$$= (-1)^{q+1} \int_{G_\mu \setminus G_\nu} d_x(\beta(x) \wedge A_{nq})$$
$$= (-1)^{2[q+1]} \int_{G_\mu \setminus G_\nu} \beta(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y),$$

à cause de $\bar{\partial}\beta = 0$.

Maintenant d'après la construction de $g(x, y)$, la forme $\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$ pour $x \in G \backslash G_{\nu o}$ et $y \in G'$ est bornée, donc avec une constante convenable

$$|\zeta_\mu(y) - \zeta_\nu(y)| \leq K \int_{G_\mu \setminus G_\nu} \bigwedge_{\lambda=1}^{n} (dx'_\lambda \wedge dx''_\lambda).$$

Cela montre la convergence uniforme sur G' de la suite ζ_ν. Par différentiation de $\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$ sous le signe intégral par rapport à y, on constate la convergence uniforme locale de toutes les dérivées de $\zeta_\nu(y)$.

4. Nous posons maintenant

$$\zeta(y) = \lim_{\nu \to \infty} \zeta_\nu(y), \quad \zeta \in \mathscr{C}^\infty_{(o,q)}(G).$$

Nous formulons alors le résultat de ce chapitre.

THÉORÈME 9.

Soit $\beta \in \mathscr{C}^\infty_{o,q+1}(G)$, telle que β est bornée sur G et $\bar{\partial}\beta = 0$. Alors la $(0, q)$-forme $\alpha = \gamma + \zeta$ satisfait à $\bar{\partial}\alpha = \beta$, où l'on rappelle

$$\gamma(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y),$$

$$\zeta(y) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y).$$

Démonstration. A cause de la pseudo-convexité de G, il existe $\eta \in \mathscr{C}^\infty_{o\,q}(G)$ telle que $\bar{\partial}\eta = \beta$; η n'a pas besoin d'être borné mais possède d'après le théorème 8 la représentation

$$\eta(y) = \zeta_\nu(y) + \gamma_\nu(y) + \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[\int_{x \in \partial G_\nu} \eta(x)\, \Omega_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y \Gamma(y) \right]$$

pour $y \in G_{\nu o}$ et $\nu > \nu_o$.

De là il s'ensuit

$$\beta(y) = \bar{\partial}\eta(y) = \bar{\partial}\zeta_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y).$$

Faisons dans cette équation $\nu \to \infty$; ainsi, pour $y \in G_{\nu o}$,

$$\bar{\partial}\zeta_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y) \to \bar{\partial}\zeta(y) + \bar{\partial}\gamma(y),$$

d'après les lemmes 7.3 et 7.1. Le raisonnement vaut pour tout ν_o, donc $\forall y \in G$, $\bar{\partial}\alpha = \beta$.

Chapitre IV

ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

§ 8

1. Rappelons que la norme uniforme a été définie au § 1.5 pour des éléments de $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{oq}(G)$; on obtient

$$\forall y \in G, \ |\alpha(y)| = \sup_{|x_1| \leq 1 \ldots |x_q| \leq 1} \alpha(y)[x_1, \ldots, x, q],$$

$$|\alpha| = \sup_{y \in G} |\alpha(y)|.$$

Le but de ce chapitre est de prouver, avec les notations du chapitre précédent: si $\bar{\partial}\beta = 0$, $\exists \alpha, K > 0$ tels que $\bar{\partial}\alpha = \beta$ et $|\alpha| \leq K|\beta|$.

2. *Majoration de* γ

On avait $\quad \gamma(y) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y).$

On en tire $\quad |\gamma(y)| \leq \dfrac{|\beta|}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \frac{K_1}{|x-y|^{2n-1}} \bigwedge_{\lambda=1}^{n} (d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda).$

Soit S la sphère de rayon R = (diamètre G) et centrée en 0.

$$|\gamma(y)| \leq \frac{K_1 |\beta|}{(2\pi)^n} \int_S \bigwedge_{\lambda=1}^{n} \frac{(d\bar{z}_\lambda \, dz_\lambda)}{|z|^{2n-1}} \leq K|\beta|,$$

où K est indépendant de y, d'où $|\gamma| \leq K|\beta|$.

La majoration de ζ est beaucoup plus difficile à obtenir; nous aurons d'abord besoin de certaines évaluations sur la fonction g du théorème 5.

§ 9. Evaluations pour la fonction $g(x, y)$ du théorème 5

1. D'après sa « construction », g ainsi que ses dérivées premières sont majorées sur un voisinage compact de $\partial G \times G$, donc sur $\partial G_\nu \times G_\nu$ indépendamment de ν pour ν supérieur à un ν_o convenable. Pour majorer le noyau $A_{nq}(x, y)$ le seul problème est donc de minorer le dénominateur où intervient g à une certaine puissance.

Lemme 9.1. Il existe un voisinage compact de $\partial G \times G$, des constantes $K_1 > 0$ et $b > 0$ de telle sorte que l'on ait

$$\forall (x, y) \in K \quad \text{avec} \quad |w - y| \leqq b\,, \ |g(x, y)| \geqq K_1 \, |P(x, y)|\,.$$

Ceci résulte immédiatement de la « construction » de g; avec les notations de la démonstration du théorème 5, on avait

$$|x - y| \leqq b\,, \ g(x, y) = P(x, y)\, e^{C(x,y) - A(x,y)}$$

d'où le résultat.

Nous sommes ramené à minorer $|P(x, y)|$.

2. *Minoration de* $Re\, P(x, y)$.

On rappelle qu'on a obtenu en (6) § 5.2.

$$Re\, P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x - y, x - y] + 0(|x - y|^3)\,.$$

La plurisousharmonicité de φ entraîne que, pour x dans un voisinage compact de ∂G, il existe $C > 0$ tel que

$$\partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x - y, x - y] \geqq C\,|x - y|^2\,.$$

On a aussi $\exists\, \delta\,, \ |x - y| \leqq \delta \Rightarrow 0(|x - y|^3) \leqq \dfrac{C}{2}\,|x - y|^2\,.$

Donc $\forall\, \nu \geqq \nu_o$ (ν_o choisi assez grand)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \\ \\ \\ |x - y| \leqq \delta \end{array} \right. \Rightarrow Re\, P(x, y) \geqq \frac{C}{2}\,|x - y|^2\,.$$

On a remarqué que $(x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \geqq 0$ et ce terme disparaît.

3. Minoration de $|\, Im\, P(x, y)\,|$.

Utilisons ici la définition de $P(x, y)$, § 5.2 (4),

$$P(x, y) = 2\, \partial\varphi(x)[x-y] - \partial \otimes \partial\varphi(x)[x-y, x-y],$$

d'où $P(x, y) = 2\, \partial\varphi(y)[x-y] + 0(|x-y|^2)$. Mais $\partial\varphi(y)[x-y] = \frac{1}{2}\{d\varphi(y)[x-y] - i\, d\varphi(y)[i(x-y)]\}$ d'après le § 1.1, lemme 1.1, d'où $Im\, P(x, y) = -i\, d\varphi(y)[i(x-y)] + 0(|x-y|^2)$.

Pour chaque y utilisons maintenant un système de coordonnées d'origine y, tel que l'hyperplan tangent H à la « surface » $\{x \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$ est $x'_1 = 0$, et $i\, H = \{x \mid x''_1 = 0\}$, $x-y = (x'_1, x''_1, \ldots, x'_n, x''_n)$.

Dans ces conditions $\left|\dfrac{d\varphi}{dx'_1}(y)\right| = |\, d\varphi(y)\,|$,

$$|\, Im\, P(x, y)\,| = \left|\frac{d\varphi}{dx'_1}(y)\right| \times |\, x'_1\,| + 0(|\, x-y\,|^2).$$

$|\, d\varphi(y)\,|$ est une fonction continue dans un voisinage compact de ∂G, donc minorée par une constante strictement positive. Il existe donc $A > 0$, $B > 0$ et v_o, tel que si $v \geqq v_o$

(3) $\quad \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v,\ |\, Im\, P(x, y)\,| \geqq A\,|\, x''_1\,| - B\,|\, x-y\,|^2.$

4. Minoration de $|\, P(x, y)\,|$ *et* $|\, g(x, y)\,|$.

Pour tirer le meilleur parti de (2) et (3) nous avons besoin du lemme

Lemme 9.2. [2] $\quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma$ dans $\mathbf{R}$, $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $0 < \gamma$,

$$\max\ (\alpha, \beta-\gamma) \geqq \frac{\alpha}{2\alpha+\beta}(\alpha+\beta).$$

Démonstration. Si $\alpha \geqq \beta - \gamma$,

$$\max\ (\alpha, \beta-\gamma) = \alpha = \alpha\frac{\alpha+(\alpha+\gamma)}{2\alpha+\gamma} \geqq \frac{\alpha}{2\alpha+\gamma}(\alpha+\beta).$$

Si $\alpha < \beta - \gamma$, $\alpha + \gamma < \beta$. Alors $(\alpha+\gamma)^2 \leqq \beta(\alpha+\gamma)$, ou $\alpha^2 \leqq -\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \beta\alpha + \gamma$, $\alpha^2 + \alpha\beta \leqq 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$, $\alpha(\alpha+\beta) \leqq (\beta-\gamma)(2\alpha+\gamma)$,

d'où $$\max(\alpha, \beta-\gamma) = \beta - \gamma \geqq \frac{\alpha}{2\alpha+\beta}(\alpha+\beta).$$

A partir de (2) et (3) il est clair que pour (x, y) convenables

$$|P(x,y)| \geqq \max\left(\frac{c}{2}|x-y|^2,\ A|x''_1| - B|x-y|^2\right)$$

d'où $$|P(x,y)| \geqq \frac{\frac{c}{2}}{c+B}\left(\frac{c}{2}|x-y|^2 + A|x''_1|\right)$$ d'après le lemme 9.2.

Concluons:

$$(4)\quad \begin{cases} \exists\, k_1 > 0,\ v_o \in \mathbf{N}, \delta > 0, \\ \forall (x,y) \in \partial G_v \times G_v,\ \forall v \geqq v_o,\ |x-y| \leqq \delta\} \Rightarrow |P(x,y)| \\ \qquad\qquad \geqq k_1(|x-y|^2 + |x''_1|) \end{cases}$$

En tenant compte du lemme 9.1 on a:

$$\exists\, k > 0,\ \exists\, v_o \in \mathbf{N},\ \exists\, \eta > 0,$$

$$(4')\quad \begin{cases} \{\forall (x,y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geqq v_o, |x-y| \leqq \eta\} \\ \qquad\qquad \Rightarrow |g(x,y)| \geqq k(|x-y|^2 + |x''_1|). \end{cases}$$

§ 10. Solution bornée de $\bar\partial\alpha = \beta$

1. Majoration des ζ_v.

On rappelle

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_v} \beta(x) \wedge A_{nq}(x,y) \qquad (\S\, 7.1)$$

et d'après les théorèmes 7 (§ 5), 2 et 3,

$$A_{nq} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \binom{n-1}{q} A(f^*, g^*),$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_{qk} D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Nous devons donc majorer

$$D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{g^*}{g}\right)$$

$$= D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \frac{\bar\partial_y f^*}{f}, \frac{\bar\partial_x f^*}{f}, \frac{\bar\partial_x f^*}{g}\right),$$

car
$$\bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right) = \frac{\bar\partial_x f^*}{f} + \bar\partial_x\left(\frac{1}{f}\right) \wedge f^* ;$$

le second terme disparaît dans le produit extérieur avec f^*, de même pour les termes en $\bar\partial_x (f^*/f)$ et $\bar\partial_x (g^*/g)$. D'où, en tenant compte du § 9, 1 et 4 (4'),

$$\exists\, h_1 > 0,\ \exists\, \nu_o \in \mathbf{N}, \exists \eta > 0 : \nu \geqq \nu_0,\ \forall (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \text{ et } |x-y| \leqq \eta$$

on a

$$|D_{1,1,q,r-k,k-1}(\qquad)| \leqq \frac{h_1}{(|x-y|^2 + |x''_1|)\,|x-y|^{1+2(n-2)}},$$

d'où: $\exists h > 0$, $\exists \nu_o \in \mathbf{N}$, $\exists \eta > 0$,

$$(5)\quad \begin{cases} (x, y) \in (\partial G_\nu \times G_\nu),\ \nu \geqq \nu_0,\ |x-y| \leqq \eta \\ \qquad\qquad \Rightarrow |A_{nq}(x, y)| \leqq \dfrac{h}{(|x-y|^2 + |x''_1|)\,|x-y|^{2n-3}}. \end{cases}$$

et de façon presque évidente

$$\exists\, K_2,\ |x-y| \geqq \eta,\ \nu \geqq \nu_0,\ \forall (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu : |A_{nq}(x, y)| \leqq K_2 .$$

Notons bien que toutes les constantes intervenant ne dépendent pas de y.

On décompose alors l'intégrale

$$\zeta_\nu(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n}\left[\int_{\substack{x \in \partial G_\nu \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) + \int_{\substack{x \in \partial G_\nu \\ |x-y| \geq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y)\right];$$

le deuxième terme est majoré par $K|\beta| \times \sup\limits_{\nu \geqq \nu_o} \{\text{Aire } \partial G_\nu\}$.

Pour le premier terme on utilise (5).

$$\left|\int_{\substack{x \in \partial G_\nu \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y)\right| \leqq |\beta|\, h \int_{\substack{|x-y| \leq \eta \\ x \in \partial G_\nu}} \frac{d\sigma}{|x-y|^{2n-3}(|x-y|^2 + |x''_1|)}$$

où $d\sigma$ est l'élément différentiel d'aire sur ∂G_ν.

Il se peut que $\partial G_v \cap |x-y| \leq \eta = \emptyset$ tout est alors terminé, sinon on peut paramétrer $\partial G_v \cap \{|x-y| \leq \eta\}$ par $x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x''_n$ avec les notations du § 9.3.
On pose $r = (x''^2_1 + x'^2_2 + x''^2_2 + \ldots + x''^2_n)^{\frac{1}{2}}$.
Avec une nouvelle constante l (toujours indépendante de y) on a

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leq l\,|\beta| \int_{r \leq \eta} \frac{dx''_1\, dx'_2\, dx''_2 \ldots dx''_n}{r^{2n-3}(r^2 + |x''_1|)}.$$

On passe en coordonnées sphériques dans $\mathbf{R}^{2n-1}$; il vient avec une autre constante M

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leq M\,|\beta| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\eta} \frac{r^{2n-2}\, dr}{r^{2n-3}(r^2 + r\,|\cos\theta|)}\, d\theta.$$

On a $$\int_0^{\eta} \frac{dr}{r + |\cos\theta|} = \mathrm{Log}(\eta + |\cos\theta|) - \mathrm{Log}(|\cos\theta|)$$

et l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Log}\,|\cos\theta|\, d\theta$ est convergente, ce qui permet de conclure:

THÉORÈME 10.

a) *Soit G un domaine strictement pseudo-convexe avec un bord de classe $\mathscr{C}^4$. Il existe une application linéaire L continue du sous-espace vectoriel des formes $\bar\partial$-fermées de $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{(p,q+1)}(G)$ dans $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{(p,q)}(G)$ telle que si*
$\alpha = L\beta$, $\bar\partial\alpha = \beta$.
La continuité se traduit par $\exists K > 0$, $|\alpha| \leq K|\beta|$.

b) *Il existe une base de voisinage strictement pseudo-convexe G_v de $\bar G$ tels que* a) *soit valable avec la même constante K.*

Pour $p = 0$ la démonstration a été faite.

Pour $p > 0$ il suffit d'écrire

$$\beta = \sum_I \beta_I \wedge dx_I, \text{ où } I = \{i_1 < \ldots < i_p\} \subset \{1, \ldots n\},$$

$\beta_I \in \mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{(o,q+1)}(G)$ et $\bar\partial\beta = 0 \Rightarrow \bar\partial\beta_I = 0$;

le problème est ramené à $p = 0$.

Le b) résulte de ce que tout ce qui a été fait sur les G_ν aurait pu être fait sur $\tilde{G}_\nu = \{ x \mid \varphi(x) < \varepsilon_\nu \}$, $\varepsilon_\nu \searrow 0$, pour ν suffisamment grand, car la condition $G_\nu \subset\subset G$ n'a joué aucun rôle; on a seulement utilisé ∂G_ν voisin de ∂G.

REMARQUE.

On a prouvé l'existence d'un noyau dans le chapitre III; ce noyau dépend de la fonction g et de la forme g^* dont on affirme seulement l'existence dans le chapitre II. Dans le cas particulier où *G est strictement convexe* de bord de classe $\mathscr{C}^3$, la fonction $g(x, y) = 2\,\partial\varphi(x)\,[x-y]$ et $g^*(x, y) = 2\,\partial\varphi(x)$ conviennent (à cause de la convexité stricte de g), on a alors une formule *constructive* pour l'équation $\bar{\partial}\alpha = \beta$ lorsque $\bar{\partial}\beta = 0$, $(\beta \in \mathscr{C}^\infty_{o,\,q+1}(G))$ et le § 5 (ch. II) serait à supprimer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIEB, I. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf strengpseudokonvexen Gebieten. *Mathematische Annalen 190* (1970), pp. 6-44.

[2] GRAUERT, H. und I. LIEB. Das Ramirezsche Integral und die Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen. *Rice Univ. Studies., Complex Analysis*, 1969.

[3] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[4] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables.* Van Norstrand, Princeton, 1966.

[5] —— L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. *Acta Mathematica 113* (1965), pp. 91-145.

[6] RAMIREZ DE, A. E. Ein Divisionsproblem und Randintegraldarststellungen in der komplexen Analysis. *Math. Ann. 184* (1970), pp. 172-187.

[7] CHENKIN, G. M. Une représentation intégrale pour des fonctions holomorphes sur un domaine strictement pseudo-convexe et une application (en Russe). *Matem. Sb. 120* (1969), pp. 611-632.

(Reçu le 21 novembre 1972)

M. Jambon
Mathématiques
Faculté des Sciences
F-34 — Montpellier

vide-leer-empty

vide-leer-empty

vide-leer-empty