§2. Forme différentielle de Cauchy-Fantappiè

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Chapitre Premier

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

§ 2. Forme différentielle de Cauchy-Fantappiè

Sur un ouvert W de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, soit f^* un n-uplet de formes de $\mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$, $f^* = \{f^*_\nu\}_{1 \leq \nu \leq n}$.

Pour chaque ν on définit $f_\nu(x, y) = f^*_\nu(x, y)\,[x-y]$ et on suppose que chaque fonction $f_\nu(x, y)$ ainsi définie ne s'annulle pas sur W.

Définition 1.

$$D_q(f^*) = \frac{f^*_1}{f_1} \wedge \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*_2}{f_2}\right) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*_q}{f_q}\right) \wedge \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*_{1+q}}{f_q}\right) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*_n}{f_n}\right)$$

s'appelle la forme différentielle de Cauchy-Fantappiè (C.F. forme) d'ordre q sur W, associée à f^*.

Théorème 1. *$D_q(f^*)$ est indépendant de f^*_1.*

Démonstration. $D_q(f^*) \in \mathscr{C}^1_{(n,\,n-q;\,0,\,q-1)}(W)$. On va donc faire agir $D_q(f^*)$ sur $2n-1$ vecteurs et on mettra en évidence une simplification par $f^*_1\,[x-y]$.

On pose $X_\nu \in E$ pour $1 \leqq \nu \leqq 2\,n-q$,

$X_\nu \in F$ pour $2n-q+1 \leqq \nu \leqq 2n-1$,

avec les notations du § 1 (ici $E = F = \mathbf{C}^n$).

On note $\xi_\nu = y$ pour $2 \leqq \nu \leqq q$,

$\xi_\nu = x$ pour $q + 1 \leqq \nu \leqq n$,

σ_{2n-1} est le groupe symétrique d'ordre $2n-1$.

$I = (i_{q+1}, \ldots, i_n)$ un arrangement à $(n-q)$ éléments de $\{1, \ldots, 2n-q\}$,

$J = (j_2, \ldots, j_q)$ une permutation à $(q-1)$ éléments de $\{2n-q+1, \ldots 2n-1\}$,

$K = \{k_1, \ldots, k_n\}$, $k_1 < \ldots < k_n$ un ensemble tel que $K \cap I = \{1, \ldots, 2\,n-q\}$, $K \cap I = \varnothing$.

On a alors une écriture intéressante de $D_q(f^*)$.

$$D_q(f^*)[X_1, \ldots, X_{2n-1}]$$
$$= \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_{2n-1} \\ 2 \leq \nu \leq q \\ q+1 \leq \nu \leq n}} \sum_{\substack{\sigma(2\nu) = j_\nu \\ \sigma(2\nu) = i_\nu}} \varepsilon_\sigma \frac{f_1^*[X_{\sigma(1)}]}{f_1^*[x-y]} \prod_{\nu=1}^{n} \bar{\partial}_{\xi\nu} \left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]} \right] (X_{\sigma(2\nu)}) .$$

La sommation pour I, J fixés est une forme n-**C**-linéaire alternée de $X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}$; elle est donc parfaitement déterminée par sa valeur sur une base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle on va choisir $X_{k_1} = [x-y]$. On peut le faire car ce vecteur se comporte comme un vecteur constant vis-à-vis de $\bar{\partial}_x$ et $\bar{\partial}_y$. Si $\sigma_{(1)} \neq k_1 \exists \nu$ avec $X_{\sigma(2\nu+1)} = X_{k_1} = [x-y]$ pour ce ν on a

$$\bar{\partial}_{\xi_\nu} \left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]} \right] = 0 .$$

Les seuls termes restants sont des termes avec $\sigma(1) = k_1$ et on a la simplification

$$\frac{f_1^*[x-y]}{f_1^*[x-y]} = 1 .$$

Le théorème est démontré.

§ 3. Une formule d'homotopie

Nous allons utiliser le théorème 1 pour rechercher la connexion entre différentes C.F. formes. Nous entrevoyons ensuite les cas particuliers importants pour la suite.

1. Soit toujours W un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Définition 2. Pour $1 \leq \nu \leq r$, soit $f_\nu^* \in \mathscr{C}^{k_\nu}_{(p_\nu, q_\nu;\, r_\nu, s_\nu)}(W)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.

$$D_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}(f_1^*, \ldots, f_r^*) = (\overset{\alpha_1}{\wedge} f_1^*) \wedge \ldots \wedge (\overset{\alpha_r}{\wedge} f_r^*) .$$

Définition 3. Soit $f^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ avec $f(x,y) = f^*(x,y)[x-y]$ ne s'annulle pas sur W.

$$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$