§4. La formule intégrale de Bochner-Martinelli généralisée

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ 4. La formule intégrale de Bochner-Martinelli généralisée

On supposera désormais que $\mathbf{C}^n$ est muni de sa structure d'espace Hilbertien.

1. Soit $W = \{ (x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \mid x \neq y \}$; alors sur W la C.F. forme définie à partir de $(\bar{x}-\bar{y})^*$ (voir (1))

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q-1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$$

est bien définie.

(1) Notons que, $\forall u \in \mathbf{C}^n$, $\bar{u}^*$ désigne la forme $\mathbf{C}$-linéaire

$$u^* : h \to \langle h \,.\, u \rangle \,.$$

Définition 4. $B_{nq}(x, y)$ s'appelle le noyau de Bochner-Martinelli pour une $(0,q)$ forme (B.M. Kern)

$$B_{nq} \in \mathscr{C}^{\infty}_{(n,\, n-q-1;\, 0,q)}(W) \,.$$

Nous prolongeons la définition par $B_{n,-1} = B_{n,n} = 0$.

Lemme 4.2. $\bar{\partial}_x B_{nq} = (-1)^q \bar{\partial}_y B_{n,q-1}$, $0 \leq q \leq n$.

Ce lemme résulte de $(n-q)\, \bar{\partial}_x D_{q+1}(f^*) = -q\, \bar{\partial}_y D_q(f^*)$.

Démonstration. Remarquons que d'après le théorème 1 (ou sa démonstration)

$$D_{q,r+1}\left(\bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) = 0 \quad \text{avec} \quad q + r + 1 = n \,.$$

$$\bar{\partial}_x D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= q\,(-1)^q D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$

$$\bar{\partial}_y D_{1,q-1,r+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= (1+r)\,(-1)^{q-1} D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

On a utilisé les formules de dérivation et de commutation des § 1.3.3 et 1.4.3. En tenant compte des coefficients on obtient le lemme 4.2.

Lemme 4.3.

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} (n-1)! \quad \sum [(\bar{x}_k - \bar{y}_k)\, dx_k \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \bigwedge_{\mu=1}^{n-q-1} (d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu})] \, | x - y |^{-2n},$$

où la sommation est étendue aux indices vérifiant $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-q-1} \leq n$.

Il est clair que seuls les termes où $k, i_1, \ldots i_q, j_1 \ldots j_{n-q-1}$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$ ne sont pas nuls.

Démonstration. On développe l'expression de $D_{q+1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$ donnée dans (§ 3.1 Remarque) en utilisant de plus les règles de commutation.

2. Soit maintenant G un domaine borné dans $\mathbf{C}^n$ avec une frontière ∂G de classe $\mathscr{C}^1$. On prend l'orientation naturelle de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire $x_1', x_1'', \ldots, x_n', x_n''$ avec $x_\nu = x'_\nu + ix''_\nu$ est un système de coordonnées de $\mathbf{R}^{2n}$ orienté positivement et sur ∂G on choisit l'orientation induite (celle du théorème de Stokes). Ainsi les signes sont déterminés pour l'intégration.

Lemme 4.4. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^{\infty}_{0,q+1}(G)$, γ bornée sur G. Alors

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^{\infty}_{(0,q)}(G)$$

Démonstration. D'abord l'intégrale a un sens car

$$| B_{nq}(x, y) | = 0\left(\frac{1}{| x - y |} 2n - 1\right)$$

d'après le lemme 4.3.

Montrons la différentiabilité pour $y_o \in G$; soit f fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $0 \leq f \leq 1$ partout, $f = 1$ dans un voisinage compact K_1 de y_o, f est à support compact K_2 avec $K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset G$.

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} [1 - f(x)]\, \gamma(x)\, B_{nq}(x, y) + \int_{x \in G} f(x)\, \gamma(c)\, B_{nq}(x, y).$$

Le premier terme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car l'intégration porte en réalité (pour y voisin de y_o) sur un domaine où le dénominateur ne s'annulle pas.

Pour le deuxième terme $\alpha_2(y)$ on effectue le changement de variable d'intégration $x = y + z$. Il vient pour y voisin de y_o

$$\alpha_2(y) = \sum \int_{z \in G - y_o} \gamma(y+z) f(y+z) \frac{\bar{z}_k}{|z|^{2n}} dz_k \ldots$$

Sous cette forme la différentiabilité en y ne pose plus de problème car $\gamma(y+z)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Le raisonnement vaut naturellement pour tout y_o dans G.

3. Théorème 4.

Soit $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{oq}(\bar{G})$. Alors pour chaque $y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \Big[\int_{x \in \partial G} \gamma(c) \wedge B_{nq}(x, y) - \int_{x \in G} [\bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] - \bar{\partial}_y \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq-1}(x, y) \Big].$$

C'est la formule de Bochner-Martinelli généralisée, pour $n = 1$, $q = 0$, on retrouve la formule de Cauchy.

a) On a
$$\begin{aligned} d_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] &= \bar{\partial}_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x B_{nq}(x, y) \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y B_{n,(q-1)}(x, y), \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 4.2 pour la dernière égalité.

b) Soit tout d'abord $q = 0$; γ est une fonction, et $B_{n,q-1} = B_{n,-1}$ disparaît.

Nous choisissons $y \in G$ et posons

$$K_\varepsilon = \{x \in G \mid |x - y| \leqq \varepsilon\} \subset\subset G \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = G \setminus K_\varepsilon$$

Nous appliquons le théorème de Stokes sur G_ε à la forme trouvée en a).

$$\int_{x \in G_\varepsilon} \bar{\partial}_x \gamma(c) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{x \in \partial G_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) - \int_{x \in \partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y)$$

Dans cette égalité on fait $\varepsilon \to 0$, l'intégrale de « volume » converge vers l'intégrale étendue à tout G et la première intégrale de « surface » ne change pas.

Pour la deuxième intégrale de « surface » on a

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{\partial K_\varepsilon} [\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y) + \gamma(y) \int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y).$$

La première intégrale du second membre tend vers 0 avec ε car

$$|[\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y)| = 0\left(\frac{1}{|x - y|^{2n-2}}\right).$$

Le deuxième terme est $\gamma(y)$ à un facteur numérique près, en effet on fait le changement $x - y = \varepsilon t$ dans l'expression de $B_{no}(x, y)$ donnée par le lemme 4.3.

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \bar{t}_k \, d\, t_k \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} (d\, \bar{t}_\lambda \wedge d\, t_\lambda).$$

En utilisant les coordonnées réelles $t_\lambda = t'_\lambda + i\, t''_\lambda$

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y)$$

$$= (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2i)^n}{2} (-t''_k\, dt'_k + t'_k\, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda,$$

où on a remarqué que les termes

$$(t'_k\, dt'_k + t''_k\, dt''_k) = -\sum_{\lambda \neq k} t'_\lambda\, dt'_\lambda + t''_\lambda\, dt''_\lambda \quad \text{sur} \quad |t| = 1$$

ont disparu dans le produit extérieur.

Mais on reconnaît

$$\int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} (-t''_k\, dt'_k + t'_k\, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq 1}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda$$

$= \text{aire de la sphère de rayon 1 en dimension } 2n = \dfrac{2\Pi^n}{\Gamma(n)}$, d'où

$$\int_{x \in \partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (2\Pi i)^n,$$

En reportant cette valeur au début de b) on obtient le théorème 4 pour $q = 0$.

c) Soit maintenant q quelconque et $y_o \in G$; nous choisissons une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec $0 \leqq f \leqq 1$ dont le support est compact et contenu dans G et qui vaut 1 dans un voisinage K de y_o.

On décompose $\gamma(x) = (1-f)\,\gamma(x) + f\gamma(x)$.
La formule de Stokes appliquée à la différentielle trouvée en a) avec $(1-f)$ γ donne le théorème pour $(1-f)\,\gamma$.

d) On peut donc sans restreindre la généralité supposer maintenant que γ est à support compact.
On écrit conformément aux notations du paragraphe 1 (2.3)

$$\gamma(x) = \sum_I \gamma_I(x)\, dx_I$$

et on cherche à démontrer

$$(3.1) \qquad \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I = \frac{1}{(2\Pi i)^n}\Big[-\int_{x\in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x,y) - \bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma(x)\, dx_I \wedge B_{nq-1}(x,y)\Big].$$

Occupons-nous d'abord du deuxième terme (en $B_{n,q-1}$). On remarque au départ que

$$\bar{\partial}_y \int_{w\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) = \int_{x\in G} \sum_h \frac{\partial \gamma_I}{\partial \bar{x}_k}\, d\bar{y}_k \wedge d\bar{x}_I\, B_{nq-1}(x,y),$$

en utilisant la technique de dérivation vue à la fin de la démonstration du lemme 4.4. On remplace alors $B_{nq-1}(x,y)$ par sa valeur explicite donnée au lemme 4.3.

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) \\
&= \int_{x\in G} (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} (n-1)! \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{i\nu}}\, d\bar{y}_{i\nu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} (d\bar{y}_{i\lambda} \wedge dx_{i\lambda}) \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{n-q} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu} \\
&= (n-1)! \Bigg[\int_{x\in G} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{i\nu}}\, d\bar{x}_{i\nu} \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda\Bigg] \wedge d\bar{y}_I.
\end{aligned}$$

On rappelle $I = (i_1, \dots i_\nu, \dots, i_q)$, $i_1 < \dots < i_q$,
et on a posé $J = (j_1, \dots j_\mu, \dots, j_{n-q})$, $j_1 < \dots < j_{n-q}$,
de telle sorte que $I \cup J$ est une permutation de $(1, \dots, n)$.

Occupons-nous de la même façon du terme en $B_{nq}(x, y)$.

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y)$$

$$= (n-1)!\,(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})$$

$$dx_{j\mu} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{n-q} (d\bar{x}_{j\lambda} \wedge dx_{j\lambda})$$

$$= (n-1)!\left[\int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu}(\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})\right.$$

$$\left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda=j_\mu}}^{n} (dx_\lambda \wedge d\bar{x}_\lambda)\right] d\bar{y}_I .$$

On reconnaît dans la somme des deux intégrales en B_{nq} et B_{nq-1} intervenant dans (3.1)

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) \wedge B_{no}(x, y)\, d\bar{y}_I = -(2\Pi i)^n \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I ,$$

d'après le théorème 4 démontré pour $q = 0$. On reporte dans (3.1) et on obtient exactement le résultat désiré.

Chapitre II

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Indiquons tout d'abord quelques notations: soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$; si φ est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, $d \otimes d\varphi(x)$ est la forme bilinéaire symétrique

$$d \otimes d\varphi(x)[h.k] = d\{d\varphi(x)[h]\}[k] .$$