Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p' SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Autor: Oriat, Bernard

Kapitel: II.2. Nombres premiers ramifiés dans une extension abélienne de Q

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45361

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\delta_{K'/K} = \prod_{1 \leq v \leq m} \mathfrak{p}_v^{h_v}.$$

Si e_v est l'indice de ramification de $\mathfrak{p}_v$ sur K on a: $h_v \geqq e_v - 1$ et $h_v = e_v - 1$ si et seulement si e_v est premier avec la caractéristique du corps $\frac{A'}{\mathfrak{p}_v}$. Le discriminant de K' sur K est $N_{K'/K}(\delta_{K'/K})$ et on a la formule de transitivité: $\delta_{K''/K} = \delta_{K''/K'}\, \delta_{K'/K}$ ([2] chapitre 4, [5] chapitre 3).

Corps cyclotomiques: Dans un corps cyclotomique $\Omega(p^s)$, (p premier) p est leur seul nombre premier ramifié et: $p = (1-\xi)^{\varphi(p^s)}$, ξ désignant une racine primitive $(p^s)^{\text{eme}}$ de 1, est la décomposition de p en idéaux premiers de $\Omega(p^s)$.

p est ramifié dans un corps cyclotomique $\Omega(n)$ si et seulement si p divise n. Si n s'écrit: $n = p^s n'$ avec n' premier avec p, alors le corps d'inertie de p dans $\Omega(n)$ est $\Omega(n')$ et l'indice de ramification de p dans $\Omega(n)$ est $\varphi(p^s)$. Si q est premier avec n, la classe de q modulo n est l'automorphisme de Frœbenius, et elle engendre dans $G(n)$ le groupe de décomposition de q dans $\Omega(n)$. Le degré résiduel de q dans $\Omega(n)$ est donc le plus petit entier f tel que: $q^f \equiv 1\ (n)$.

Si ξ est une racine primitive n^{eme} de 1, $\{1, \xi, \ldots \xi^{\varphi(n)-1}\}$ est une base de l'anneau des entiers de $\Omega(n)$ sur Z. Le discriminant de $\Omega(n)$ sur Q est:

$$\frac{n^{\varphi(n)}}{\prod p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}}$$

ce dernier produit étant étendu à tous les nombres premiers p divisant n ([5] chapitre 4).

II.2. Nombres premiers ramifiés dans une extension abélienne de Q

Lemme II.1.

> Soient K une extension abélienne de Q et $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K. Alors un nombre premier p se ramifie dans K si et seulement s'il divise n.

Si p est ramifié dans K, alors il est ramifié dans tout surcorps de K, donc dans $\Omega(n)$ et il divise n.

Réciproquement, si p divise n, posons $n = p^s n'$, avec n' premier avec p.

Alors le corps d'inertie de p dans $\Omega(n)$ est $\Omega(n')$ et son groupe d'inertie $T(n, n')$.
Soit π l'application canonique de $G(n)$ sur $G({}^{K}/_{Q})$ qui à tout automorphisme de $\Omega(n)$ fait correspondre sa restriction à K. π a pour noyau $G({}^{\Omega(n)}/_{K})$ et comme $\Omega(n)$ est le plus petit corps cyclotomique contenant K, on a donc:

$$\Omega(n') \not\supseteq K \quad \text{c'est-à-dire} \quad T(n, n') \not\subseteq G({}^{\Omega(n)}/_{K}) .$$

$\pi(T(n, n'))$ qui est le groupe d'inertie de p dans K, n'est donc pas réduit à l'identité et p se ramifie dans K.

II.3. Décomposition d'un nombre q premier, non ramifié dans K_r

K_r désigne une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier) et $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée. Les notations restent les mêmes qu'au premier chapitre. q est un nombre premier non ramifié dans K_r, c'est-à-dire d'après le lemme précédent, premier avec n_r.

Si p est impair et suivant que $u_r = 0$ ou $u_r \geqq 2$,

soit
$$q \equiv c_1^{\beta_1} c_2^{\beta_2} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r)$$

ou
$$q \equiv b_0^{\beta_0} c_1^{\beta_1} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r) ,$$

la décomposition de q dans $G(n_r)$.

On posera alors:

— Si
$$2 \leqq u_r \leqq r : V(q) = \alpha_0 \beta_0 + \sum_{2 \leq j \leq m_r} \alpha_j \beta_j - \beta_1$$

— Si
$$u_r = r + 1 : V(q) = \sum_{1 \leq j \leq m_r} \alpha_j \beta_j - \beta_0$$

— Si
$$u_r = 0 : V(q) = \sum_{2 \leq j \leq m_r} \alpha_j \beta_j - \beta_1$$

De même si $p = 2$ et suivant que $u_r = 0$, ou $u_r = 2$, ou $u_r \geqq 3$, soit

$$q \equiv c_1^{\beta_1} c_2^{\beta_2} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r) \quad \text{ou} \quad q \equiv a_0^{\beta_0} c_1^{\beta_1} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r)$$

ou

$$q \equiv a_0^{\beta_0} a_0'^{\beta'_0} c_1^{\beta_1} \dots c_{m_r}^{\beta_{m_r}} (n_r)$$