Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p' SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Autor: Oriat, Bernard

Kapitel: III.3. Conditions pour qu'une extension abélienne de Q POSSÈDE UNE BASE D'ENTIERS NORMALE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45361

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On vérifie que $\frac{ndk}{v} + c$ et nd sont premiers entre eux, c'est-à-dire que les $\xi^{\frac{ndk}{v}+c}$ appartiennent à F.

LEMME III.3.

> $\Omega(d)$ possède une base d'entiers normale si et seulement si d est sans facteur carré.

En effet si d est sans facteur carré, alors d'après le lemme III.2, appliqué à $n = 1$, les conjugués de ξ, racine primitive d^{eme} de 1, engendrent l'anneau des entiers de $\Omega(d)$. Comme ils sont en nombre égal à $[\Omega(d): Q]$, ils forment donc une base de l'anneau des entiers de $\Omega(d)$. Réciproquement soit p un nombre premier et ξ une racine primitive $(p^2)^{\text{eme}}$ de 1. Comme $\Phi_{p2}(X) = \Phi_p(X^p)$, on a $Tr_{\Omega(p2)/Q}(\xi) = 0$. D'autre part:

$$Tr_{\Omega(p^2)/Q}(\xi^p) = p\, Tr_{\Omega(p)/Q}(\xi^p) = -p$$

et la trace de toute racine $(p^2)^{\text{eme}}$ de 1, non primitive, est multiple de p. Ainsi la trace de tout entier de $\Omega(p^2)$ est multiple de p, donc ne peut être égale à 1. $\Omega(p^2)$ n'a pas de base d'entiers normale, non plus que tout surcorps de $\Omega(p^2)$. En particulier $\Omega(d)$ n'a pas de base d'entiers normale si d possède un facteur carré.

III.3. CONDITIONS POUR QU'UNE EXTENSION ABÉLIENNE DE Q POSSÈDE UNE BASE D'ENTIERS NORMALE

> *Notation :* Si K est une extension cyclique sur Q, θ un élément de K, σ un automorphisme de K, t un entier positif, $B(\theta, \sigma, t)$ désignera l'ensemble des t premiers conjugués successifs de θ par σ, c'est-à-dire:
>
> $$B(\theta, \sigma, t) = \{\sigma^k(\theta), 0 \leqq k < t\}$$

PROPOSITION III.1.

> Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier). Soit $\Omega(n_r)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K_r. On suppose que u_r est différent de 0, que ξ est une racine primitive $(n_r)^{\text{eme}}$ de 1 et B_{r-1} est une base de l'anneau des entiers de K_{r-1}. Soient $\theta = \sum_{s \in S_r} \xi^s$ et σ un générateur de $G(K_r/Q)$.

Alors:

$B_{r-1} \cup B(\theta, \sigma, \varphi(p^r))$ est une base de l'anneau des entiers de K_r.

Soit g un automorphisme de $\Omega(n_r)$ prolongeant σ. Les classes de $G(n_r)$ modulo S_r sont $g^k S_r$, $0 \leqq k < p^r$.

Introduisons les ensembles suivants:

F est l'ensemble des racines primitives n_r^{eme} de 1 c'est-à-dire:

$$F = \{ \xi^a ; a \in G(n_r) \},$$

$$F' = \{ \xi^a ; a \in \bigcup_{0 \leq k \leq \varphi(p^r)} g^k S_r \}$$

et

$$F'' = \{ \xi^b ; 0 \leqq b < \varphi(n_r) \quad \text{et} \quad p \mid b \}.$$

Puisque p^{u_r} est le plus grand facteur carré divisant n_r, le lemme III.2 permet d'affirmer que le module engendré sur Z par $F \cup F''$ est l'anneau des entiers de $\Omega(n_r)$. Montrons que $F' \cup F''$ est une base de cet anneau. Pour cela il suffit de constater que:

— Card $F' \cup F'' = \varphi(n_r)$.

— Tout élément de $F - F'$ appartient au module engendré par F'.

La première assertion résulte d'un dénombrement immédiat des éléments de $F' \cup F''$. Pour démontrer la deuxième, on écrit tout d'abord que:

$$\sum_{0 \leq k \leq p-1} \xi^{\frac{n_r}{p} k} = 0$$

($\xi^{\frac{n_r}{p}}$ est une racine primitive p^{eme} de 1).

Soit en multipliant cette égalité par ξ, on obtient:

$$\sum_{a \in T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right)} \xi^a = 0 \tag{1}$$

Examinons comment sont répartis les éléments de $T\left(n_r, \dfrac{n_r}{p}\right)$ dans les classes de $G(n_r)$ modulo S_r.

Puisque $K_r \nsubseteq \Omega\left(\dfrac{n_r}{p}\right)$ on a $\Omega(n_r) = K_r \,.\, \Omega\left(\dfrac{n_r}{p}\right)$ et puisque $K_{r-1} \subseteq \Omega\left(\dfrac{n_r}{p}\right)$ (condition I.2.A sur la suite $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$), on a:

$$K_{r-1} = K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p}\right).$$

Les sous-groupes correspondants de $G(n_r)$ vont donc vérifier les égalités:

$$T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right) . S_r = S_{r-1} \quad \text{et} \quad T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right) \cap S_r = \{1\},$$

qui montrent que S_{r-1}, groupe des K_{r-1}-automorphismes de $\Omega(n_r)$, est produit direct de S_r et de $T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right)$. Dans toute classe de S_{r-1} modulo S_r il existe donc un seul élément de $T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right)$. Ces classes sont $g^{kp^{r-1}} S_r$, $0 \leq k \leq p-1$. Si $sg^{p^{r-1}}$ est l'unique élément de $g^{p^{r-1}} S_r \cap T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right)$, alors pour tout k entre 0 et $p-1$, $s^k g^{kp^{r-1}}$ est l'unique élément de $g^{kp^{r-1}} S_r \cap T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right)$ et les éléments de $T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right)$ sont donc $s^k g^{kp^{r-1}}$, $0 \leq k \leq p-1$. L'égalité (1) va donc s'écrire:

$$\sum_{0 \leq k \leq p-1} \xi^{s^k g^{kp^{r-1}}} = 0, \tag{2}$$

s appartenant à S_r.

Tout élément de $F - F''$ peut s'écrire sous la forme:

$$\xi^{s' s^{p-1} g^{t+(p-1)p^{r-1}}} \quad \text{avec} \quad s' \in S_r \quad \text{et} \quad 0 \leq t < p^{r-1}.$$

Transformant alors l'égalité (2) par l'automorphisme $s'g^t$, on obtiendra:

$$\xi^{s' s^{p-1} g^{t+(p-1)p^{r-1}}} = - \sum_{0 \leq k \leq p-2} \xi^{s' s^k g^{t+kp^{r-1}}}.$$

Les racines primitives de 1, intervenant sous le signe $\sum$ sont dans F'. $F' \cup F''$ est donc une base des entiers de $\Omega(n_r)$.

Soit x un entier de K_r. On a $x = x' + x''$ avec x' (respectivement x'') appartenant au module engendré zur Z, par F' (respectivement F''). Soit s un K-$_r$automorphisme. Comme F'' est une base de l'anneau des entiers de $\Omega\left(\frac{n_r}{p}\right)$. $s(x'')$ appartient encore à $\Omega\left(\frac{n_r}{p}\right)$, donc au module engendré par F''. De même $s(x')$ appartient encore au module engendré par F', car s permute entre eux les éléments de F'. Comme enfin $s(x) = x$, on aura donc $s(x') = x'$ et $s(x'') = x''$.

x'' étant invariant par tout K_r-automorphisme, appartient à $\Omega\left(\frac{n_r}{p}\right) \cap K_r$ c'est-à-dire à K_{r-1}.
Quant à x', il s'écrit:

$$\sum_{a \in \bigcup_{0 \leq k < \varphi(p^r)} g^k S_r} \lambda_a \xi^a, \ \lambda_a \in Z$$

De $x' = s(x')$ on déduit que $\lambda_a = \lambda_{a'}$ si a et a' sont congrus modulo S_r.
Posant alors $\mu_k = \lambda_{gk}$, on obtient:

$$x' = \sum_{0 \leq k < \varphi(p^r)} \mu_k \Big(\sum_{a \in S_r} \xi^{ag^k} \Big) = \sum_{0 \leq k < \varphi(p^r)} \mu_k \sigma^k(\theta)$$

Remarque III.1.

On n'utilise pas complètement le fait que $\Omega(n_r)$ est le plus petit corps cyclotomique contenant Kr, mais seulement que n_r est de la forme $p^{u_r} n'$, avec n' premier avec p, sans facteur carré, $K_r \subseteq \Omega(n_r)$ et $K_r \nsubseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p}\right)$.

PROPOSITION III.2.

Soit K une extension abélienne de Q. Les conditions suivantes sont équivalentes:

III.2.A: K possède une base d'entiers normale.

III.2.B: Il existe un entier θ de K tel que $Tr_{K/Q}(\theta) = 1$.

III.2.C: Le plus petit corps cyclotomique contenant K possède une base d'entiers normale.

III.2.D: K est modérément ramifiée.

$C \Rightarrow A$ et $A \Rightarrow B$ résultent des rappels effectués au paragraphe III.1.
$B \Rightarrow C$ résulte pour les extensions cycliques de degré p^r sur Q de la proposition III.1. Reprenant les mêmes notations, si $\Omega(n_r)$ ne possède pas de base d'entiers normale, alors, d'après le lemme III.3, n_r possède un facteur carré, donc $u_r \geqq 2$.
Comme $\Phi_{n_r}(X) = \Phi_{\frac{n_r}{p^{u_r-1}}}(X^{p^{u_r-1}})$, la trace de ξ sur Q est nulle, donc celle de θ également. Si x est un entier de K_r, x se décompose comme précédemment en $x = x' + x''$ et l'on a:

$$Tr_{K_r/Q}(x) = Tr_{K_r/Q}(x'') = p\, Tr_{K_{r-1}/Q}(x'').$$

La trace d'un entier de K_r ne peut donc être égale à 1.

Soit maintenant K une extension abélienne de Q et $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K. Supposons qu'il existe un entier θ de K tel que: $Tr_{K/Q}(\theta) = 1$.
Le groupe de Galois de K sur Q est produit direct de m groupes cycliques d'ordre $p_i^{r_i}$.
Soit K_i le corps fixe de $G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times \{1\} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_m$. K_i est cyclique de degré $p_i^{r_i}$ sur Q et $K = K_1 K_2 \ldots K_m$.
Soit $\theta_i = Tr_{K/K_i}(\theta)$. θ_i est un entier de K_i tel que $Tr_{K_i/Q}(\theta_i) = 1$.
Si $\Omega(n_i)$ est le plus petit corps cyclotomique contenant K_i alors n_i est sans facteur carré d'après la démonstration précédente.
n est le *PPCM* des n_i, donc il est sans facteur carré.

Soit p un nombre premier se ramifiant dans K, c'est-à-dire divisant n. Si n est sans facteur carré, alors l'indice de ramification de p dans $\Omega(n)$ est $p-1$ et l'indice de ramification de p dans K, divise $p-1$, donc est premier à p.

Réciproquement, si n possède un facteur carré, alors n est de la forme $n = p^s n'$, avec p premier, ne divisant pas n' et $s \geqq 2$. Soit π l'application de $G(n)$ sur $G({}^K/_Q)$ qui à tout automorphisme de $\Omega(n)$ fait correspondre sa restriction à K. Puisque $K \nsubseteq \Omega\left(\frac{n}{p}\right)$, alors

$$Ker\,\pi = G({}^{\Omega(n)}/_K) \not\supseteq T\left(n, \frac{n}{p}\right).$$

Donc $\pi\left(T\left(n, \frac{n}{p}\right)\right)$ a pour ordre p et il est inclus dans $\pi\left(T(n, n')\right)$ qui est le groupe d'inertie de p dans K. L'indice de ramification de p dans K est donc multiple de p.

III.4. Bases d'entiers dans les extensions K_r

Proposition III.3.

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q, $\Omega(n_r)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K_r.