Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ZUM GEDENKEN AN HEINZ HOPF
Autor: Eckmann, Beno
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45362

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ZUM GEDENKEN AN HEINZ HOPF [1])

von Beno ECKMANN

Am 3. Juni ist Heinz Hopf nach langer Krankheit im Alter von 76 Jahren gestorben. Von 1931 bis 1965 war er Professor für Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule gewesen. In Zollikon, wo er gelebt hat, kannte man den freundlichen, gütigen und bescheidenen Gelehrten gut; wieviele aber wußten wohl von seinem wissenschaftlichen Weltruf? Nicht nur seine Angehörigen, seine Freunde, Kollegen und Schüler trauern um den Dahingegangenen, sondern die ganze mathematische Welt, die ihn und sein Werk tief verehrt. Heinz Hopf war einer der bedeutendsten Mathematiker unserer Epoche. Sein Name ist an allen mathematischen Schulen bekannt als der eines Forschers und Lehrers, dessen Lebenswerk die Wissenschaft stark beeinflußt hat und im Gedankengut ganzer Generationen weiterlebt.

Heinz Hopf wurde am 19. November 1894 in Breslau geboren. Er verbrachte dort seine Jugendzeit und begann das Studium der Mathematik, das er aber bald unterbrechen mußte: während der vier Jahre des Ersten Weltkriegs war er an der Front. Um so intensiver setzte er sein Studium nach Kriegsende fort an den Universitäten Berlin, Heidelberg und Göttingen. Er promovierte in Berlin bei Erhard Schmidt, dem er die ersten und auch nachhaltigsten wissenschaftlichen Anregungen verdankte. 1925 lernte er in Göttingen den russischen Mathematiker Paul Alexandroff kennen, mit dem ihn eine innige Freundschaft verband, die Menschliches und Wissenschaftliches in gleicher Weise umfaßte und die das ganze Leben hindurch anhalten sollte; gemeinsam mit ihm konnte er 1927 auf Grund eines Rockefeller-Stipendiums ein Jahr an der Universität Princeton verbringen. Die Arbeiten Hopfs, die in diesen Jahren entstanden, lösten große Begeisterung aus; durch sie wurde die Topologie zu einem neuen Zweig der Mathematik, der mehr und mehr ins Zentrum der Interessen rücken sollte. Alexandroff und Hopf legten in einem fundamentalen Buch über dieses Gebiet ihre Gedanken nieder.

---

[1]) *Note de la Rédaction.* — Nous remercions l'auteur de cet article paru dans la *Neue Zürcher Zeitung* du 18 juin 1971, d'en avoir autorisé la reproduction.

Im Jahr 1931 wurde der junge Privatdozent als ordentlicher Professor an die ETH berufen, wo er als Nachfolger von Hermann Weyl ein bedeutungsvolles Erbe antrat. Man muß den Weitblick der Kollegen und Behörden bei dieser Wahl bewundern, die für das Schicksal der mathematischen Schule Zürich von größter Tragweite wurde. Heinz Hopf blieb der ETH sein ganzes Leben lang treu. Er widmete sich mit derselben Intensität und Liebe der Ausbildung des Nachwuchses wie der Forschung, und es dürfte in der Schweiz keinen im mathematischen Unterricht auf Mittel- und Hochschulstufe oder in der mathematischen Forschung Tätigen geben, der nicht direkt oder indirekt von ihm beeinflußt und geprägt wäre. Er hat unzählige Mathematiker herangebildet und für ihre Aufgabe begeistert; bemerkenswert viele von ihnen sind an Hochschulen nicht nur in der Schweiz, sondern in der ganzen Welt tätig. Er selbst wirkte wiederholt als Gastdozent in Princeton, New York, Stanford, Berkeley, Rom und an vielen andern Orten. Die Universität Princeton verlieh ihm schon 1947 anläßlich ihrer 200-Jahr-Feier das Ehrendoktorat — dies war die erste einer ganzen Reihe höchster Ehrungen, mit denen die wissenschaftliche Welt sein Werk würdigte und dabei immer wieder dessen große Ausstrahlung auf das wissenschaftliche Denken unserer Zeit hervorhob; es seien hier nur noch die Mitgliedschaft der National Academy of Sciences, USA, der Accademia dei Lincei, das Ehrendoktorat der Sorbonne, der Lobatschewski-Preis der Universität Moskau erwähnt. Von 1955 bis 1958 war er Präsident der Internationalen Mathematischen Union.

Als Ehrung besonderer Art veröffentlichte die ETH 1964 zu seinem 70. Geburtstag einen Band, „Selecta", bestehend aus einer von ihm selbst getroffenen Auswahl seiner Arbeiten. Dieses Buch gibt einen Überblick über sein Schaffen und damit gleichzeitig über wesentliche Entwicklungslinien der Mathematik in den letzten Jahrzehnten. Jede einzelne dieser Arbeiten hat durch ihre Tiefe und Originalität neuartige Theorien eröffnet, die heute die meisten Zweige der Mathematik beherrschen. Das Buch enthält auch ein Verzeichnis aller Publikationen von Heinz Hopf; ihre Anzahl ist erstaunlich klein. In einer heute kaum zu findenden Beschränkung hat er mit sicherem Instinkt tiefe Probleme ausgewählt und reifen lassen, um dann jeweils in einem Wurf eine Lösung zu geben, in der neue Gedanken und Methoden zutage traten. Mit derselben Ruhe, Beherrschung und Konsequenz, mit der sich sein ganzes wissenschaftliches Leben abgespielt hat, schritt er von einer Erkenntnis zur nächsten.

* * *

In seinem mathematischen Werk widmete sich Heinz Hopf vor allem der Topologie, früher Analysis Situs genannt. Diese Disziplin wird oft als „Stetigkeitsgeometrie“ umschrieben; sie bezieht sich auf die Art geometrischer Betrachtungen, in welchen das Räumliche nicht im Sinne des Messens, der Bewegung, der Ähnlichkeit usw., sondern der Stetigkeit, des Nachbarschaftsbegriffs, der Deformation auftritt. Dabei ist mit Raum zunächst unser Erfahrungsraum gemeint, also in seiner mathematischen Abstraktion der dreidimensionale Euklidische Raum, wo man schon eine Fülle interessanten Anschauungsmaterials und schwieriger Probleme der genannten Art antrifft (Verschlingungen, Knoten, geschlossene Flächen, Vektorfelder, Strömungen, Fixpunkte...). Dann aber sind die „Räume“, die der Mathematiker betrachtet, Verallgemeinerungen hiervon, in welchen ganz analoge Grundbegriffe auftreten: höherdimensionale Räume, Funktionenräume, Phasenräume usw., wie sie in Algebra, Analysis und in vielfältigen Anwendungen in Mechanik, Physik und Technik vorkommen. Dank den Analogien zum dreidimensionalen Raum läßt sich die Kraft geometrischer Intuition auch auf diese abstrakten 'Räume anwenden, obwohl natürlich der strenge Beweis einer Aussage unabhängig von dieser Anschauung erbracht werden muß; trotzdem ist dieser Prozeß der „Geometrisierung“, der insbesondere zum Begriff der topologischen Struktur führte, ein wesentlicher Schritt in der Entwicklung seit der Jahrhundertwende gewesen, heuristisch und begrifflich gleich wichtig.

Die ersten Arbeiten Hopfs, entstanden auf Anregung von Erhard Schmidt, knüpfen an den berühmten Satz von Brouwer (1912) über die topologische Invarianz der Dimensionszahl Euklidischer Räume an sowie an die großen Arbeiten Poincarés zur Analysis Situs. Hopf behandelt dort Abbildungen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten und die *curvatura integra* (Totalkrümmung) geschlossener Hyperflächen. Das prinzipiell Bedeutsame ist hier, ganz abgesehen von der erstaunlichen Erkenntniskraft und Einsicht des jungen Forschers, die von ihm verwendete „Algebraisierung“ der Probleme. Gewiß ist diese Zurückführung geometrischer Phänomene auf algebraische, also rechnerische, im Ansatz schon in der frühen Analysis Situs von Euler bis Poincaré vorhanden (in der einfachsten Form im Eulerschen Polyedersatz); sie erscheint aber erst in Arbeiten wie Hopfs „Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel“ in ihrer vollen algebraischen Gestalt, formalisiert im Begriff der Homologiegruppe.

Dieses Erfassen stetigkeitsgeometrischer Eigenschaften durch algebraische Hilfsmittel ist entscheidend für die Topologie und bedeutet einen

Wendepunkt der modernen Mathematik. Richtig zum Durchbruch kam es erst 1925 in der Göttinger Zeit von Heinz Hopf unter dem Einfluß von Emmy Noether und ihrer Schule. Dort war der abstrakt-algebraische Strukturbegriff im Entstehen, wie er heute geläufig und bis in die elementare Mathematik gedrungen ist; und seine Erfolge waren schon damals eindrücklich. Hopf erkannte, daß die Auflösung klassisch-mathematischer Begriffe in ihre algebraischen und topologischen Bestandteile gerade dort besonders fruchtbar ist, wo aus verschiedenen Quellen stammende Intuitionen und strenge Resultate aufeinander angewendet werden können. Damit entstand die algebraische Topologie im modernen Sinne, die zunächst von Hopf selbst und dann von einer wachsenden Zahl von Schülern und Nachfolgern in intensiver Weise weitergeführt wurde. Neben ihren eigenen Erfolgen ist sie deswegen so wichtig geworden, weil durch die gegenseitige Befruchtung algebraischer und topologischer Ideen in einem sehr bemerkenswerten Wechselspiel eine ganze Reihe neuer Gebiete entstanden ist, die heute in sozusagen allen Zweigen der Mathematik und ihrer Anwendungen wesentlich geworden sind, von der Zahlentheorie bis zur Theorie der Netzwerke, von der komplexen Analysis bis zur Theoretischen Physik. Um nur einige dieser neuen Gebiete zu nennen: Homologische Algebra, Garbentheorie, komplexanalytische Räume, Faserungen und Vektorbündel, Homotopietheorie, Kategorien und Funktoren — gewöhnlich gibt man sich heute über die Ursprünge kaum mehr Rechenschaft. Manches geht auf Arbeiten von Hopf selbst direkt zurück: Die von ihm entdeckten nicht zusammenziehbaren Abbildungen von Sphären auf solche niedrigerer Dimension bilden den Ausgangspunkt für die Theorie der Homotopiegruppen und der Faserungen; die Beziehungen zwischen Fundamentalgruppe und Homologiegruppen eines Raumes führten zur Homologischen Algebra; seine berühmteste Arbeit, diejenige über die globalen Eigenschaften der Lie-Gruppen, zur Theorie der „Hopf-Algebren".

In dieser Arbeit werden interessante Gesetzmäßigkeiten, die in den globalen Eigenschaften der geschlossenen Lie-Gruppen (zum Beispiel der klassischen Gruppen wie der Drehgruppen, der unitären Gruppen) vorher durch explizite Rechnungen festgestellt worden waren, mit einem Schlage „erklärt": ihr tieferer Grund liegt in Struktursätzen für Algebren, die gleichzeitig mit einer Comultiplikation (einer Verknüpfungsvorschrift, die zur Produktbildung dual ist) versehen sind; solche Algebren mit doppelter Verknüpfung bilden heute unter dem Namen Hopf-Algebra einen zentralen und aufschlussreichen Begriff. Man möchte dieses Erklären von Gesetzmässigkeiten durch einen neuen Rahmenbegriff fast mit dem Newtonschen

Gesetz vergleichen, welches die schon vorher wohlbekannten Planetenbahnen und vieles andere mehr mit einem Schlage erklären konnte. Schließlich sind noch die großen Bemühungen von Heinz Hopf um die Differentialgeometrie im Großen zu erwähnen: mit der algebraisch-topologischen Erfassung globaler Begriffe wurde es möglich, differentielle Eigenschaften, das heißt Eigenschaften im Kleinen und Infinitesimalen wie Krümmung, Winkel, Längenmessung, Tensorfelder mit Eigenschaften der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit „im Großen" zu verknüpfen — die Erkenntnis also, daß Lösungen im Kleinen nur möglich sind, wenn sie den globalen umfassenden Bedingungen genügen, die dem Problem als Ganzem zugrunde liegen. Ist man nicht versucht, hier Parallelen mit den schwierigsten Problemen unserer Welt zu sehen ?

Gewiß dürfen alle diese Entwicklungen nicht einem Einzelnen zugeschrieben werden; Hopf selbst hätte sich energisch dagegen gewehrt. Dies wäre im Widerspruch zu dem Zug der Mathematik, den man als Gemeinsamkeit bezeichnen muß. Die Gedankengänge Hopfs standen in Wechselwirkung mit vielen andern, die von ihm nahmen und ihm gaben. Es möge entschuldigt werden, wenn an dieser Stelle keine weiteren Namen genannt sind; ihre Zahl wäre zu groß, schon nur deswegen, weil Hopf selbst ungewöhnlich viele Schüler hatte, die seine Gedankengänge weiterführten — und besonders freute er sich, wenn sie ihm neue Ideen und Aspekte brachten, an die er nicht gedacht hatte. Und auch, weil sein reger internationaler Gedankenaustausch viele andere Schulen befruchtete, die ihrerseits ganz andere Wege beschritten und zu den genannten Erfolgen beitrugen. Hopf hat in einem Bericht, den er 1966 verfaßte und der bis zum Jahre 1942 führte, gesagt: „Hier will ich aufhören. Die Vorgeschichte der heutigen Topologie war um diese Zeit, wie mir schien, beendet; die Geschichte begann. Eine jüngere Generation trat auf den Plan, die unsere alten Ideen erfolgreich fortführte und mehr als das, die mit ihren eigenen neuen Ideen manches unserer alten Probleme löste und die das Aussehen der ganzen Topologie in unerwarteter Weise beeinflußt hat." Ob man die „heroische" Zeit bis 1942 als Vorgeschichte bezeichnen soll, darf man allerdings bezweifeln.

* * *

Bei der noch so summarischen Betrachtung dieses Lebenswerkes drängen sich mancherlei Gedanken auf. Ein Aspekt betrifft den Strukturbegriff. Charakteristisch für Hopfs Arbeiten ist neben ungewöhnlicher geometrischer

Intuition die Gegenüberstellung von topologischer und algebraischer Seite des Problems. Daß man Strukturen, algebraische, topologische und vielleicht noch andere, loslöst und selbständig für sich betrachtet, ist heute etwas Selbstverständliches; es hat ja sogar schon weitgehend im Schulunterricht als „neue" Mathematik Eingang gefunden. Dieses Loslösen führt zur gewünschten begrifflichen Klärung, und durch Synthese verschiedener Strukturen entstehen die komplizierteren mathematischen Theorien, nicht zuletzt die der „alten" Mathematik. Der Übergang von einer Struktur zu einer andern, wie er für die algebraische Topologie bezeichnend ist, hat heute in der Lehre von den Kategorien und Funktoren seine außerordentlich weit führende Verallgemeinerung gefunden, wo sich scheinbar verschiedene Strukturen als sehr verwandt oder als dual zueinander erweisen. Man muß aber berücksichtigen, daß die ersten Arbeiten Hopfs in eine Zeit fielen, wo die strukturelle (oder axiomatische) Methode in ihren Anfängen stand; eine der größten Umwälzungen im mathematischen Denken, und vielleicht auch im geisteswissenschaftlichen, bereitete sich vor: die klassische Mathematik, basierend auf reeller Zahl, ganzer Zahl, Raum, wurde abgelöst durch die moderne, basierend auf dem Begriff der Struktur. In dieser historischen Sicht ist Hopfs Leistung noch höher zu werten; er hat in mancher Weise diese Entwicklung vorweggenommen und jedenfalls auch hier Wesentliches beigetragen, ganz besonders dadurch, daß er die volle Kraft der neuen abstrakten Methoden mit der erfolgreichen Lösung des konkreten vorgelegten Problems ad oculos demonstrierte.

Denn, und damit kommen wir zu einem zweiten Aspekt, es fällt auf, daß Heinz Hopf sich immer mit ganz expliziten Einzelproblemen befaßte, die im Rahmen der jeweiligen Konzeption als „konkret" zu bezeichnen waren (Vektorfelder auf Sphären und Mannigfaltigkeiten, Enden von Räumen und Gruppen, wesentliche Abbildungen usw.). In einer Weise, die sicher schwer zu entwirren wäre, hat er stets gleichzeitig die Lösung des Einzelproblems gegeben und die Methode zu seiner Bezwingung geschaffen, aus der die leitende Idee, der tiefere Grund, die weiteren Möglichkeiten klar wurden. Ob er zuerst die Lösung erahnte und daraus die Idee zur Abstraktion und zur Methode schöpfte oder ob aus Analogien und Versuchen die Methode hervorging, die schließlich die Lösung brachte, wer möchte es entscheiden? Sicher ist, daß beides dazu gehört. Sicher auch, daß wegen der Tiefe der Problemstellung und der inneren Notwendigkeit der Methode in dieser Weise etwas entsteht, das die Kraft der Verallgemeinerung und der Weiterführung in sich trägt. Die so gewonnene Abstraktion eröffnet neue Wege des Erkennens, des Verstehens und der Anwendung und erzeugt ihrerseits neue

Probleme, die nun in ihrem Rahmen konkret sind — und der Prozeß kann von neuem beginnen!

Die „alten“ Begriffe, Probleme und Einsichten sind aber deswegen durchaus nicht überholt. Im Gegenteil, sie können in neuem Lichte erscheinen und plötzlich wieder aktuell werden. Und ebenso können aus den neuen Abstraktionen unerwartete Anwendungen auf unsere Umwelt hervorgehen, die vorher strukturell nicht erfaßt werden konnten oder für die kein adäquater Kalkül bestand. Solche Entwicklungen lassen sich nur sehr schwer voraussagen; sie zeigen, wie unscharf und vergänglich Trennungen zwischen alter und neuer, reiner und angewandter Mathematik in Wirklichkeit sind. Strukturbegriffe allein ohne Verwurzelung im echten, konkreten Problem, und seien sie noch so elegant und bestechend, werden dem Wesen mathematischer Wissenschaft kaum gerecht, ebensowenig wie bloßes Festhalten an klassischen Gegenständen und unmittelbarer Anwendung ohne begriffliche Motivierung. Mathematische Einsichten schöpfen ihre Kraft aus der Tiefe der Problemstellung, die ihnen zugrunde liegt, und aus der begrifflichen Klärung, die sie anstreben; aus dem intuitiven Erfassen der Lösung und aus dem Ringen um ihre Gestaltung im strengen Rahmen der ihr gemäßen Abstraktion. Aus Hopfs Werken tritt dies deutlich hervor; denn sie sind in einem Stil von so erstaunlicher Klarheit niedergeschrieben, daß sogar komplizierteste Dinge einfach werden.

* * *

Die außergewöhnliche Ausstrahlung des wissenschaftlichen Wirkens von Heinz Hopf ist nicht allein seiner großen Begabung zuzuschreiben, sondern auch den ganz besonderen Zügen seiner Persönlichkeit. Sie war gekennzeichnet von menschlicher Wärme und bescheidener, lauterer Gesinnung, von ernster Objektivität und Sinn für Humor; jeder hatte ihn gern. Überall verspürte man seine besondere Art: im Unterricht, dem er sich in allen seinen Aspekten mit derselben liebevollen Sorgfalt annahm; in seinem Vortrag, der von bestechender Klarheit und Lebendigkeit und frei von jeder Pose war; in der persönlichen Betreuung seiner Schüler und in der Art, wie er zuhören und treffende Fragen stellen konnte; und nicht zuletzt, wenn es um menschliche Probleme ging und er mit aufrichtigem Rat zur Verfügung stand. Das Heim, das seine Frau ihm in Zollikon schuf, war ein idealer Lebens- und Arbeitsplatz für ihn; es war aber auch ein Ort der Begegnung, wo Freunde und Kollegen von nah und fern sich trafen, wo Studenten ihre ersten Anregungen zur Forschung empfingen, wo seine

Schüler ihren Doktor feierten und ihre Braut vorstellten. Dort im Garten und auf den Spazierwegen im Wald entstanden Pläne, Ideen, Theoreme; dort entfaltete sich das persönliche Verhältnis, in welchem man nicht nur Rat, Kritik, Aufmunterung empfing, sondern auch den Eindruck einer schönen Lebenseinstellung. Ein Wort anerkennender Freude, ein Zeichen höflicher Skepsis in der Stimme genügten oft, um den Dingen eine entscheidende Wendung zu geben. In der Vorkriegs- und Kriegszeit fanden viele Verfolgte und Flüchtlinge in diesem Hause Hilfe und selbstlose Gastfreundschaft. Einen schweren Schatten warfen die jahrelange Erkrankung und der Tod von Frau Anja Hopf auf das Heim, wo trotzdem immer noch die Fäden von Freundschaft und wissenschaftlicher Gemeinsamkeit zusammenliefen.

Heinz Hopfs Einstellung zum Leben und zu den Mitmenschen war nicht zu trennen von der zur Wissenschaft. Ihn fesselte die Gemeinsamkeit des Denkens, ohne die es keine Mathematik gibt und die Fremde in ungeahnter Weise verbinden kann; verbinden in der Suche nach anschaulichem Erfassen, in der Freude am Unbekannten und im Mut zum Neuen, aber auch im Ringen um die mathematische Strenge, deren Rahmen stets neu verstanden werden muß. In solchen Zügen sah er ein Vorbild für jede Unternehmung des menschlichen Geistes und einen Weg zum gegenseitigen Verstehen. Diese Überzeugung war es auch, die ihn bewog, 1955 das Amt des Präsidenten der Internationalen Mathematischen Union anzunehmen, und er hat es in diesem Sinne verwaltet. Dank seiner Beliebtheit und Aufrichtigkeit gelang es ihm, sie zu einer echten weltumfassenden Körperschaft zu machen, die, genau wie er selbst, wissenschaftliche und menschliche Kontakte gerade mit den jüngeren Generationen von Forschern über alle Grenzen und Kontinente hinweg fördern konnte. Wie die andern wissenschaftlichen Unionen war auch die Mathematische damals im Wiederaufbau begriffen; es besteht kein Zweifel daran, daß die Rolle, die sie heute in der ganzen Welt zu spielen vermag, in hohem Maße Hopf zu verdanken ist. Er war ein Weltbürger im besten Sinne des Wortes. Zu Hause aber war er in der Schweiz, in Zürich, an der ETH. Hier war der Kreis, in dem er leben und seine Aufgaben erfüllen wollte. Wir sind dankbar dafür. Seine Freundschaft, sein Wirken, das Bild seiner Persönlichkeit wird in uns lebendig bleiben, wenn wir auch in tiefer Trauer Abschied nehmen mußten.