Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ANNEAUX DE FATOU
Autor: Chabert, Jean-Luc
Kapitel: 2. Situation récente
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45364

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1.4. Pour tout anneau intègre A de corps des fractions K, la propriété (i) ci-dessous implique la propriété (ii):

(i) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que $\deg(P) < \deg(Q)$ et que $Q(o) = 1$, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ sont dans A, alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A.

(ii) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $A[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(o)$ soit non nul, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ sont dans A, alors $Q(o)$ est inversible dans A.

Notons en outre que Dress [5] a étendu à son tour la propriété (i) en question aux anneaux factoriels.

Ce qui précède conduit à donner les définitions suivantes:

1.5. Etant donné un corps K, une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ à coefficients dans K est dite normalisée si (i) P et Q sont étrangers entre eux (ii) $\deg(P) < \deg(Q)$ (iii) $Q(o) = 1$.

1.6. Définition (Benzaghou [1]). *Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit de Fatou lorsque les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

(i) Pout toute fraction rationnelle normalisée $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$ si les coefficients de son développement en série à l'origine sont dans A, alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A.

(ii) Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifie une relation de récurrence du type (1.2.1), où les coefficients q_k appartiennent à K et où l'ordre s de la récurrence est le plus petit possible, alors les q_k sont eux-mêmes dans A.

2. Situation récente

2.1. *Un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur* 1 *est un anneau de Fatou* [1].

Cette assertion donne en particulier tous les cas d'anneaux de Fatou envisagés au paragraphe 1.

2.2. *Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos* [1].

2.3. *Rappel.* Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit complètement intégralement clos si: $x \in K$, $d \in A - \{o\}$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $dx^n \in A$ implique $x \in A$.

(Pour montrer l'assertion 2.2 il suffit d'appliquer la définition 1.6. (i) à la fraction rationnelle $\dfrac{d}{1 - xX}$.)

Ces deux résultats font poser la question: la classe des anneaux de Fatou est-elle distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 et de la classe des anneaux complètement intégralement clos [1] ? A ce propos on notera que l'on trouve difficilement des exemples d'anneaux complètement intégralement clos qui ne sont pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 (cf. exemple de Nakayama [7], cf. aussi [2], Algèbre commutative, VI, § 4, exercice 6).

2.4. *La classe des anneaux de Fatou est distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur* 1 [4].

2.5. *La propriété pour un anneau d'être de Fatou passe à la fermeture intégrale* [1] *et aux anneaux de polynômes* [3], *mais ne passe pas aux localisés* [4] (tout comme pour la propriété d'être complètement intégralement clos).

3. Un anneau est de Fatou si et seulement si il est complètement intégralement clos

Etant donné l'assertion 2.2., il reste à montrer que la condition est suffisante. Soit donc A un anneau complètement intégralement clos de corps des fractions K et soit $P(X)/Q(X)$ une fraction rationnelle normalisée de $K(X)$ dont le développement en série à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est à coefficients dans A. Il s'agit de montrer que $Q(X)$ appartient à A $[X]$.

Comme $Q(o) = 1$, $Q(X)$ est égal au produit $\prod_{0 \leq i \leq q} (1 - \alpha_i X)$ où q est le degré de $Q(X)$ et où les α_i sont les inverses des racines de $Q(X)$ dans un corps de décomposition. Pour que les coefficients de $Q(X)$ soient dans A il faut et il suffit que les α_i soient entiers sur A. Comme la fermeture intégrale dans une extension de corps d'un anneau complètement intégralement clos est aussi un anneau complètement intégralement clos ([2], Algèbre commutative, V, § 1, exercice 14), on peut supposer que les racines