Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ARITHMÉTIQUE DANS DES EXTENSIONS FINIES DU CORPS DES QUOTIENTS DE CERTAINS ANNEAUX DE PRÜFER

Autor: Moser, Nicole

Kapitel: I. Discriminant et ramification.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45366

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$(1)\quad \begin{cases} . \ K = \bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha. \\ . \ \text{Si } \alpha \text{ et } \beta \text{ appartiennent à } I, \text{ le corps composé } K_\alpha \,.\, K_\beta \text{ appartient} \\ \quad \text{à l'ensemble } \{K_\gamma\}_{\gamma \in I}. \end{cases}$$

Il existe toujours au moins un sous-ensemble I, $\mathscr{F}$ lui-même. Lorsque D est dénombrable, nous pouvons prendre $\mathbf{N}$ comme sous-ensemble I:

$$K = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$$

les corps K_n étant emboîtés.

Soit L une extension finie séparable de K. Si θ est un générateur de L/K, posons $L_\alpha = K_\alpha(\theta)$. *Nous ne considèrerons par la suite que les indices α pour lesquels* $[L_\alpha : K_\alpha] = [L : K] = n$.

Enfin les anneaux d'entiers de K, L, K_α et L_α seront notés respectivement A, B, A_α et B_α.

I. Discriminant et ramification.

1. *Discriminant.*

Définition 1.

Nous appellerons discriminant de l'extension L/K l'idéal Δ de A engendré par les discriminants des bases de L/K à éléments dans B.

Puisque L/K est séparable, Δ est un idéal entier non nul de A.

Proposition 1.

Soit I un sous-ensemble de $\mathscr{F}$ possédant la propriété (1). *Notons Δ le discriminant de L/K, et Δ_α celui de L_α/K_α. Alors*

$$\Delta = \bigcup_{\alpha \in I} \Delta_\alpha .$$

En effet, un élément de Δ est combinaison linéaire finie, à coefficients dans A, de discriminants de bases de L/K à éléments dans B: c'est donc un élément d'un Δ_α.

Inversement, puisque $[L_\alpha : K_\alpha] = [L : K]$, toute base de L_α/K_α à coefficients dans B_α est une base de L/K à coefficients dans B, et Δ contient $\bigcup_{\alpha \in I} \Delta_\alpha$.

2. *Ramification.*

Remarquons que dans l'anneau A, tout idéal premier $\mathscr{P}$ est maximal. Le localisé $A_{\mathscr{P}}$ est un anneau de valuation, donc, à $\mathscr{P}$, on peut associer une valuation v sur K, de groupe des valeurs Γ_v. Comme l'extension L/K est finie, il n'existe dans B qu'un nombre fini d'idéaux premiers au-dessus de $\mathscr{P}$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ (cf. Bourbaki [3] § 8). A chaque $\mathfrak{p}_i$ est associée une valuation v_i de L qui prolonge v; le groupe Γ_{v_i} des valeurs de v_i admet Γ comme sous-groupe.

Définition 2.

Soit $\mathscr{P}$ un idéal premier de A. Nous dirons que $\mathscr{P}$ se ramifie dans l'extension L/K si l'un des indices $e_i = (\Gamma_{v_i}:\Gamma_v)$ est strictement supérieur à 1.

Remarque: si $f_i = [B/\mathfrak{p}_i:A/\mathscr{P}]$, l'inégalité $\sum_{i=1}^{l} e_i f_i \leqq n$ est encore vraie. (cf. Bourbaki [3]).

Proposition 2.

Pour qu'un idéal premier $\mathscr{P}$ de A se ramifie dans l'extension L/K, il faut et il suffit qu'il contienne l'idéal discriminant Δ.

La démonstration de cette proposition repose sur le principe bien connu de la propagation de la non-ramification vers le haut. On peut énoncer ce principe de la manière suivante:

soient k le corps des quotients d'un anneau de Dedekind, M et N deux extensions algébriques finies séparables de k, linéairement disjointes sur k. Si $\mathscr{P}$ est un idéal premier de k non ramifié dans l'extension M/k, tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de N qui divise $\mathscr{P}$ est non ramifié dans l'extension $M \,.\, N/N$.

Posons $\mathscr{P}_\alpha = \mathscr{P} \cap A_\alpha$, et notons v^α (resp v_i^α) la restriction de v (resp v_i) à K_α (resp L_α).

Supposons $\mathscr{P}$ ramifié dans L/K: il existe un indice $i \in [1, l]$ tel que $(\Gamma_{v_i}:\Gamma_v) > 1$. On ne peut trouver $\alpha_0 \in I$ tel que $(\Gamma_{v_i^{\alpha_0}}:\Gamma_{v^{\alpha_0}}) = 1$; sinon, la « propagation de la non-ramification vers le haut », et l'égalité $K = \bigcup_{\substack{\beta \in I \\ \beta \geqq \alpha_0}} K_\beta$ permettraient de conclure que $(\Gamma_{v_i}:\Gamma_v) = 1$. Donc pour tout $\alpha \in I$, $\mathscr{P}_\alpha$ est ramifié dans L_α/K_α : $\mathscr{P}_\alpha$ contient le discriminant Δ_α de L_α/K_α, et $\mathscr{P}$ contient $\Delta = \bigcup \Delta_\alpha$.

Inversement, si $\mathscr{P}$ contient Δ, pour tout $\alpha \in I$, on a les inclusions:

$$\mathscr{P}_\alpha \supset \Delta \cap A_\alpha \supset \Delta_\alpha .$$

Donc $\mathscr{P}_\alpha$ se ramifie dans L_α/K_α. Par « propagation de la non-ramification vers le haut », il existe au moins un indice i tel que pour tout α, $(\Gamma_{v_i}\alpha:\Gamma_v\alpha) > 1$. Pour cette valeur de i, $(\Gamma_{v_i}:\Gamma_v) > 1$, et $\mathscr{P}$ est ramifié dans L/K.

II. Bases entières.

1. *Exemple*

$$\begin{tikzcd}
 & & & L = K(\sqrt[3]{3}) \arrow[dl, dash] \\
 & & \mathbf{Q}(j, \zeta_n, \sqrt[3]{3}) \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & \\
 & \mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3}) \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{Q}(j, \zeta_n) \arrow[r, dash] & K \\
 & \mathbf{Q}(j) \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & \mathbf{Q}(j, \zeta_n) & \\
\mathbf{Q} \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & \mathbf{Q}(j) & &
\end{tikzcd}$$

Soit K le corps obtenu en adjoignant à $\mathbf{Q}$, j et toutes les racines 5^n-ièmes de l'unité; soit ζ_n une racine primitive 5^n-ième de l'unité. Le corps K, extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$, est une extension abélienne de $\mathbf{Q}$. Mais $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}$ n'est pas abélienne; donc $L = K(\sqrt[3]{3})$ est une extension de degré 3 de K.

Les extensions $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3}, \zeta_n)/\mathbf{Q}(j, \zeta_n)$ sont des extensions de Kummer. Les seuls idéaux qui peuvent se ramifier sont ceux qui divisent 3. La théorie de Kummer (cf. Hecke [6]) permet de calculer leur participation au discriminant de L_n/K_n; on obtient: $\Delta_n = 3^4 A_n$. Mais comme $Z[j]$ est principal, $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}(j)$ admet une base entière, $\{\lambda, \mu, \nu\}$, de discriminant 3^4. Donc L/K admet $\{\lambda, \mu, \nu\}$ comme base entière.

2. *Caractérisation des A-modules B de type fini.*

Proposition 3.

A et B étant définis au paragraphe précédent, les propositions suivantes sont équivalentes :

a — B est un A-module de type fini.