1. DÉMONSTRATION DE 1.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

En remerciement à mon Professeur, M. Hubert Delange.

Soit f une fonction additive. On se propose de démontrer les résultats suivants:

1. *S'il existe* $l \in \mathbf{C}$ *tel que* $\lim_{n \to +\infty} \{f(2n+1) - f(n)\} = l$, *alors* $f(n) = \dfrac{l}{\operatorname{Log} 2} \operatorname{Log} n$.

2. *S'il existe* $M \in \mathbf{R}^+$ *tel que, pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, $|f(2n+1) - f(n)| \leqslant M$, *alors* $f(n) = C \operatorname{Log} n + g(n)$, *où* C *est une constante et où* g *est une fonction additive bornée.*

1. Démonstration de 1.

1.1. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On notera $S_k(m) = \dfrac{2^k m^k - 1}{2m-1}$ pour k entier $\geqslant 1$. D'après notre hypothèse, on a, pour k entier $\geqslant 2$:

$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^k n + m S_{k-1}(m)) = l + o(1)$, $\quad (n \to +\infty)$;

Or $(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m), m) = 1$. Comme f est additive,

$$f(2^{k-1} m^k n + m S_{k-1}(m)) = f(m) + f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)),$$

et la relation précédente devient:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)) - f(m) = l + o(1), \; (n \to +\infty).$$

On obtient donc:

$$\sum_{j=2}^{l} \{f(2^j m^j n + S_j(m)) - f(2^{j-1} m^{j-1} n + S_{j-1}(m)) - f(m)\} = (k-1)\, l + o(1) \; (n \to +\infty),$$

c'est-à-dire:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2mn+1) - (k-1)f(m) = (k-1)\, l + o(1)$$

Or:

$$f(2mn+1) - f(mn) = l + o(1) \ (n \to +\infty) .$$

Notre relation peut donc s'écrire:

(A)

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(mn) - (k-1)f(m)) = kl + o(1) \ (n \to +\infty) .$$

On pose alors $n = S_k(m) . (2m\, S_k(m)\, q + 1)$. D'abord:

$$2^k m^k n + S_k(m) = S_k(m)\left[2^k m^k (2mS_k(m)\, q + 1) + 1\right] .$$

Or

$$\left(S_k(m), 2^k m^k (2mS_k(m)\, q + 1) + 1\right) = \left(S_k(m), 2^k m^k + 1\right) = 1 .$$

On a donc:

(α) $$f(2^k m^k n + S_k(m)) = f(S_k(m)) + f(2^k m^k (2mS_k(m)\, q + 1) + 1) .$$

Ensuite, on remarque que $mn = m\, S_k(m) . (2mS_k(m)\, q + 1)$ et que $(m, S_k(m) = (2mS_k(m)\, q + 1, S_k(m)) = (2mS_k(m)\, q + 1, m) = 1$.

On obtient donc:

(β) $$f(mn) = f(m) + f(S_k(m)) + f(2mS_k(m)\, q + 1) .$$

En substituant les deux relations (α) et (β) dans (A), on obtient:

(A′)

$$f\left[2^k m^k (2mS_k(m)\, q + 1) + 1\right] - kf(m) - f(2mS_k(m)\, q + 1)$$
$$= kl + o(1) \ (q \to +\infty) .$$

Mais, d'après notre hypothèse:

$$f\left[2^k m^k (2mS_k(m)\, q + 1) + 1\right] - f\left[2^{k-1} m^k (2mS_k(m)\, q + 1)\right]$$
$$= l + o(1) \ (q \to +\infty) .$$

En remplaçant dans (A′), on a:

$$f\left[2^{k-1} m^k (2mS_k(m)\, q + 1)\right] - kf(m) - f(2mS_k(m)\, q + 1)$$
$$= (k-1)\, l + o(1) \ (q \to +\infty) .$$

Comme

$$(2^{k-1} m^k, 2m S_k(m) q + 1) = 1 ,$$

on a

$$f[2^{k-1} m^k (2m S_k(m) q + 1)] = f(2^{k-1} m^k) + f(2m S_k(m) q + 1)$$

et l'on obtient:

$$f(2^{k-1} m^k) - k f(m) = (k-1) l + o(1) \quad (q \to +\infty) ,$$

c'est-à-dire:

$$f(2^{k-1} m^k) - k f(m) = (k-1) l + o(1) .$$

Conclusion 1: si $m \in \mathbf{N}^*$, si $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$, alors:

$$\text{(I)} \qquad f(2^{k-1} m^k) - k f(m) = (k-1) l .$$

1.2. — a) Faisant $m = 1$ dans la formule (I), on a

$$f(2^{k-1}) = (k-1) l \quad \text{pour} \quad k \geqslant 2 .$$

En particulier, pour $k = 2$, $f(2) = l$. On en déduit immédiatement que

$$f(2^k) = k f(2) = kl \quad \text{pour} \quad k \geqslant 1 .$$

— b) Soit maintenant p un nombre premier impair. Compte tenu de a), en prenant $m = p$ dans la formule (I) on obtient

$$f(p^k) = k f(p) .$$

Conclusion 2: f est complètement additive.

1.3. Comme f est complètement additive, et que $l = f(2)$, notre hypothèse initiale prend la forme $f(2n+1) - f(2n) = o(1)$, $(n \to +\infty)$. On remarque alors que $f[(2n+1)^2] = f[2(2n^2+2n) + 1]$, et donc que l'on a:

$$f[(2n+1)^2] - f(4n^2 + 4n) = o(1) \quad (n \to +\infty) .$$

Or:

$$f[(2n+1)^2] = 2 f(2n+1) .$$

On obtient donc:

$$2 f(2n+1) - f(4n^2 + 4n) = o(1) \quad (n \to +\infty) .$$

Mais:

$$2f(2n+1) - 2f(2n) = o(1) \quad (n \to +\infty),$$

donc:

$$2f(2n) - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Comme

$$2f(2n) = 2f(2) + 2f(n), \qquad \text{et} \qquad f(4n^2+4n) = 2f(2) + f(n) + f(n+1),$$

on obtient:

$$f(n+1) - f(n) = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Grâce à un théorème bien connu d'Erdös [1], on en déduit:

$$f(n) = C \log n.$$

Pour $n = 2, f(2) = C \log 2 = l$, donc $C = \dfrac{l}{\log 2}$.

2. Démonstration de 2.

2.1. Par des calculs semblables à ceux du § 1.1., où les égalités avec un second membre de la forme $rl + o(1)$ seront remplacées par des inégalités portant sur les modules des premiers membres, on montre que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout k entier $\geqslant 2$,

$$\text{(I')} \qquad |f(2^{k-1}m^k) - kf(m)| \leqslant (k+1)M.$$

Ceci vaut évidemment encore pour $k = 1$.

2.1.1. Prenant $m = 2^{k'-1}$, on voit que, pour k et $k' \geqslant 1$,

$$|f(2^{kk'-1}) - kf(2^{k'-1})| \leqslant (k+1)M.$$

En échangeant k et k', on a:

$$|f(2^{kk'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leqslant (k'-1)M.$$

Il résulte de là que, quels que soient k et $k' \geqslant 1$,

$$|kf(2^{k'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leqslant (k+k'+2)M,$$