

1. DÉMONSTRATION DE 1.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

En remerciement à mon Professeur, M. Hubert Delange.

Soit f une fonction additive. On se propose de démontrer les résultats suivants:

1. *S'il existe $l \in \mathbf{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{f(2n+1) - f(n)\} = l$, alors*

$$f(n) = \frac{l}{\log 2} \log n .$$

2. *S'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|f(2n+1) - f(n)| \leq M$, alors $f(n) = C \log n + g(n)$, où C est une constante et où g est une fonction additive bornée.*

1. DÉMONSTRATION DE 1.

- 1.1. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On notera $S_k(m) = \frac{2^k m^k - 1}{2m - 1}$ pour k entier ≥ 1 .

D'après notre hypothèse, on a, pour k entier ≥ 2 :

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^k n + m S_{k-1}(m)) = l + o(1), \quad (n \rightarrow +\infty);$$

Or $(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m), m) = 1$. Comme f est additive,

$$f(2^{k-1} m^k n + m S_{k-1}(m)) = f(m) + f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)),$$

et la relation précédente devient:

$$\begin{aligned} f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)) - f(m) \\ = l + o(1), \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^k \{f(2^j m^j n + S_j(m)) - f(2^{j-1} m^{j-1} n + S_{j-1}(m)) - f(m)\} \\ = (k-1)l + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2mn + 1) - (k-1)f(m) = (k-1)l + o(1)$$

Or:

$$f(2mn + 1) - f(mn) = l + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Notre relation peut donc s'écrire:

(A)

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(mn) - (k-1)f(m) = kl + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

On pose alors $n = S_k(m) \cdot (2mS_k(m)q + 1)$. D'abord:

$$2^k m^k n + S_k(m) = S_k(m) [2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1].$$

Or

$$(S_k(m), 2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1) = (S_k(m), 2^k m^k + 1) = 1.$$

On a donc:

$$(\alpha) \quad f(2^k m^k n + S_k(m)) = f(S_k(m)) + f(2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1).$$

Ensuite, on remarque que $mn = mS_k(m) \cdot (2mS_k(m)q + 1)$ et que $(m, S_k(m)) = (2mS_k(m)q + 1, S_k(m)) = (2mS_k(m)q + 1, m) = 1$.

On obtient donc:

$$(\beta) \quad f(mn) = f(m) + f(S_k(m)) + f(2mS_k(m)q + 1).$$

En substituant les deux relations (α) et (β) dans (A), on obtient:

(A')

$$\begin{aligned} f[2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1] - kf(m) - f(2mS_k(m)q + 1) \\ = kl + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Mais, d'après notre hypothèse:

$$\begin{aligned} f[2^k m^k (2mS_k(m)q + 1) + 1] - f[2^{k-1} m^k (2mS_k(m)q + 1)] \\ = l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (A'), on a:

$$\begin{aligned} f[2^{k-1} m^k (2mS_k(m)q + 1)] - kf(m) - f(2mS_k(m)q + 1) \\ = (k-1)l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Comme

$$(2^{k-1}m^k, 2mS_k(m)q+1) = 1,$$

on a

$$f[2^{k-1}m^k(2mS_k(m)q+1)] = f(2^{k-1}m^k) + f(2mS_k(m)q+1)$$

et l'on obtient:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty),$$

c'est-à-dire:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + o(1).$$

Conclusion 1: si $m \in \mathbf{N}^*$, si $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, alors:

$$(I) \quad f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l.$$

1.2. — a) Faisant $m = 1$ dans la formule (I), on a

$$f(2^{k-1}) = (k-1)l \quad \text{pour } k \geq 2.$$

En particulier, pour $k = 2$, $f(2) = l$. On en déduit immédiatement que

$$f(2^k) = kf(2) = kl \quad \text{pour } k \geq 1.$$

— b) Soit maintenant p un nombre premier impair. Compte tenu de a), en prenant $m = p$ dans la formule (I) on obtient

$$f(p^k) = kf(p).$$

Conclusion 2: f est complètement additive.

1.3. Comme f est complètement additive, et que $l = f(2)$, notre hypothèse initiale prend la forme $f(2n+1) - f(2n) = o(1)$, ($n \rightarrow +\infty$). On remarque alors que $f[(2n+1)^2] = f[2(2n^2+2n)+1]$, et donc que l'on a:

$$f[(2n+1)^2] - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Or:

$$f[(2n+1)^2] = 2f(2n+1).$$

On obtient donc:

$$2f(2n+1) - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Mais:

$$2f(2n+1) - 2f(2n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

donc:

$$2f(2n) - f(4n^2 + 4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Comme

$$\begin{aligned} 2f(2n) &= 2f(2) + 2f(n), \quad \text{et} \quad f(4n^2 + 4n) = 2f(2) \\ &\quad + f(n) + f(n+1), \end{aligned}$$

on obtient:

$$f(n+1) - f(n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Grâce à un théorème bien connu d'Erdös [1], on en déduit:

$$f(n) = C \log n.$$

Pour $n = 2$, $f(2) = C \log 2 = l$, donc $C = \frac{l}{\log 2}$.

2. DÉMONSTRATION DE 2.

2.1. Par des calculs semblables à ceux du § 1.1., où les égalités avec un second membre de la forme $rl + o(1)$ seront remplacées par des inégalités portant sur les modules des premiers membres, on montre que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout k entier ≥ 2 ,

$$(I') \quad |f(2^{k-1}m^k) - kf(m)| \leq (k+1)M.$$

Ceci vaut évidemment encore pour $k = 1$.

2.1.1. Prenant $m = 2^{k'-1}$, on voit que, pour k et $k' \geq 1$,

$$|f(2^{kk'-1}) - kf(2^{k'-1})| \leq (k+1)M.$$

En échangeant k et k' , on a:

$$|f(2^{kk'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leq (k'-1)M.$$

Il résulte de là que, quels que soient k et $k' \geq 1$,

$$|kf(2^{k'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leq (k+k'+2)M,$$